

Zéros réels de modèles trigonométriques dépendants

Thibault Pautrel

Soutenance de thèse – lundi 10 janvier 2022



Sommaire

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Bref historique
 - Problématiques
- 2 Résultats obtenus
 - Modèle trigonométrique
 - Signaux non-analytiques
- 3 Idées principales des preuves
 - Approche via la formule de Kac-Rice
 - Approche à la Salem-Zygmund
- 4 Ouvertures

Introduction

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^n c_i \xi_i z^i,$$

où $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ déterministes, $\xi_0, \dots, \xi_n$ des variables i.i.d. centrées de variance 1.

$$N_{\mathbb{R}}(n) = \text{Card}(x \in \mathbb{R}, f_n(x) = 0\}.$$

Questions naturelles

Comment estimer $N_{\mathbb{R}}(n)$? Pour un degré n fixé?
Asymptotiquement? En moyenne? Presque-sûre?

Bref historique

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^n c_i \xi_i z^i,$$

où $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ déterministes, $\xi_0, \dots, \xi_n$ des variables i.i.d. centrées de variance 1.

- **Polynômes de Kac:** $c_i = 1$. Pour $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)_{\mathbb{R}}$,

$$\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}] = \left(\frac{2}{\pi} + o(1) \right) \log(n) \quad (\text{Kac, 1943}).$$

Si $\xi_k \sim \mathcal{R}(1/2)$, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$N_{\mathbb{R}} = \frac{2}{\pi} \log(n) + o\left(\log(n)^{2/3} \log \log(n)\right) \quad (\text{Erdős-Offord, 1956})$$

avec probabilité $1 - o\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log(n)}}\right)$.

Bref historique

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^n c_i \xi_i z^i,$$

où $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ déterministes, $\xi_0, \dots, \xi_n$ des variables i.i.d. centrées de variance 1.

- **Polynômes de Weyl:** $c_i = \sqrt{\frac{1}{i!}}$. Pour $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)_{\mathbb{R}}$,

$$\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}] = \left(\frac{2}{\pi} + o(1) \right) \sqrt{n} \quad (\text{Edelman, Kostlan, 1996})$$

- **Polynômes elliptiques:** $c_i = \sqrt{\binom{n}{i}}$. Pour $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)_{\mathbb{R}}$,

$$\mathbb{E}[N_{\mathbb{R}}] = \sqrt{n} \quad (\text{Edelman, Kostlan, 1996})$$

Modèle trigonométrique

On considère

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

où $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ i.i.d., centrés et de variance 1.

On souhaite étudier $\mathcal{N}(f_n, [a, b]) = \text{Card}(x \in [a, b] \mid f_n(x) = 0)$.

Question

L'asymptotique de $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$ (resp. $\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]$) quand $n \rightarrow +\infty$ dépend-elle de la loi des coefficients aléatoires $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$?

Cas indépendant

On considère

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

où $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ i.i.d., centrés et de variance 1.

Théorème (Dunnage (1966) & Qualls (70s))

Pour $(a_k)_{k \geq 1}, (b_k)_{k \geq 1}$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On considère

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

où $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ i.i.d., centrés et de variance 1.

Théorème (Flasche, 2017)

Pour $(a_k)_{k \geq 1}, (b_k)_{k \geq 1}$ i.i.d., on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Cas dépendant

$(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ sont deux suites indépendantes de **processus gaussiens stationnaires** définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que

$$\mathbb{E}[a_k a_l] = \mathbb{E}[b_k b_l] = \rho(k - l) = \int_0^{2\pi} e^{-i(k-l)x} \mu_\rho(dx),$$

μ_ρ : mesure spectrale.

On notera $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx + \mu_s$.

Question

Influence de μ_ρ sur le comportement de $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$ quand $n \rightarrow +\infty$?

Cas gaussien stationnaire dépendant

- *Sambamdhani (1978)*: pour $i \neq j$, $\mathbb{E}[a_i a_j] = \rho_0 \in]0, 1[$.
- *Reganathan (1978, 1984)*: $\mathbb{E}[a_i a_j] = \rho_0^{|i-j|}$.
- *Angst, Dalmao, Poly (2017)*: $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ étant μ_ρ -dépendants avec $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$, $\psi_\rho \in \mathcal{C}^0((0, 2\pi))$ et $\inf \psi_\rho > 0$.

Dans tous ces cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

👉 En particulier pour des **corrélations fortes** on a universalité.

Problématiques

👉 Que dire pour $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$ lorsque l'on considère une mesure spectrale μ_ρ /densité ψ_ρ plus générale? Peut-on trouver une asymptotique différente de $\frac{2}{\sqrt{3}}$?

En particulier, que se passe-t-il quand

- ① $\psi_\rho > 0$ p.s. mais n'est plus nécessairement minorée ?
- ② ψ_ρ n'est plus nécessairement continue?
- ③ $\lambda(\psi_\rho = 0) > 0$?
- ④ μ_ρ est singulière?

Résultats obtenus

Question 1

Que dire quand $\psi_\rho > 0$ p.s. mais n'est plus minorée?

Théorème

Si $\psi_\rho > 0$ p.s. sur $[0, 2\pi]$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Remarques:

- Cela corrobore la conjecture que $\frac{2}{\sqrt{3}}n$ est la plus petite valeur possible pour le nombre moyen de zéros de f_n .
- $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ pour $\inf_{x \in [0, 2\pi]} \psi_\rho(x) > \gamma_\rho$ (ADP).

Théorème (asymptotique **en moyenne**)

Si

$$\begin{cases} \mu_\rho = \mu_s + \psi_\rho(x)dx \\ \exists \eta > 0, \text{ t.q. } \log(\psi_\rho) \in L^{1+\eta}([0, 2\pi], dx) \end{cases},$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Pour $\eta = 0$, $\log(\psi_\rho) \in L^1 \iff (a_k)_{k \geq 1}$ purement
 'non-déterministe', i.e. admettant une représentation causale

$$a_k = \sum_{j=0}^{\infty} c_j N_{k-j}, \quad (c_k)_{k \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad (N_k)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(0, 1).$$

Théorème (asymptotique $\mathbb{P}$ -p.s.)

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} d\mu_\rho = \psi_\rho(x)dx \text{ et } \psi_\rho \text{ régulière} \\ \exists \eta > 0, \text{ s.t. } 1/\psi_\rho \in L^\eta([0, 2\pi], dx) \end{array} \right. ,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Remarques

Ces deux théorème étendent et généralisent dans un contexte plus large (asymptotique $\mathbb{P}$ -p.s.) les résultats établis dans [Angst, Dalmao & Poly](#).

Pour $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ définis comme accroissements d'un MBF, ils s'appliquent.

Question 2

Que dire quand $\lambda(\{\psi_\rho = 0\}) > 0$?

Question 3

Que dire quand ψ_ρ n'est plus nécessairement continue?

C.1 : ψ_ρ est continue par morceaux et

$$\{\psi_\rho = 0\} = \bigcup_{i=1}^p [a_i, b_i] \cup \bigcup_{j=1}^q \{c_j\},$$

C.2 : $\psi_\rho \in \mathcal{C}^1$ tel que ψ'_ρ est Hölder par morceaux

Théorème

Sous **C.1** ou **C.2**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} [\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])] }{n} = \frac{\lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{\lambda(\{\psi_\rho \neq 0\})}{\pi\sqrt{3}} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Remarque:

- **ADP**: $\exists \rho \searrow 0$ arbitrairement lent tel que

$$\lim_n \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

- **Ici**: $\exists \rho \searrow 0$ arbitrairement polynomialement rapidement tel que

$$\lim_n \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \neq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

👉 L'universalité n'est **pas** reliée à la **vitesse de convergence vers zéro** de ρ .

Remarques:

- $\lim_n \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n}$ dépend seulement de la **taille** de l'ensemble des zéros ψ_ρ et non de la **forme** de la densité.
- $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\right]$ est le continuum de valeurs que l'on peut atteindre.
- $\{f_n = 0\} \leftrightarrow \{\psi_\rho = 0\}$.

Question 4

Que dire de l'asymptotique de $\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n}$ lorsque μ_ρ est purement singulière?

 On étudie le cas $\mu_\rho = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})$, $\alpha \neq 0$.

Théorème

On n'a pas de convergence de $\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]/n$ quand $n \rightarrow +\infty$, plus précisément:

$$\sqrt{2} < \liminf_n \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} < \limsup_n \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \leq 2.$$

Théorème

$\exists$ une fonction ℓ^α t.q. $\forall \beta \in (0, 1)$, pour $n \gg 1$ t.q. $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} - \ell^\alpha(n\alpha \bmod \pi) \right| = O\left(\frac{1}{n^\beta(1 - |\cos(n\alpha)|)}\right) + o(1).$$

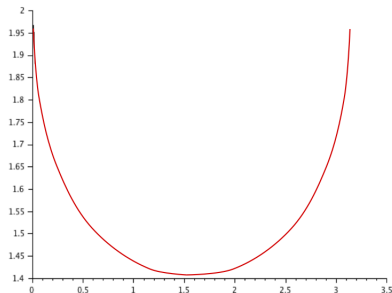
$\ell^\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est telle que $\text{Im}(\ell^\alpha) \subset (\sqrt{2}, 2]$

$$\ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, 2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_x^\alpha(s, u)|^2} ds du,$$

$$\text{où } g_x^\alpha(s, u) := \frac{\sin(x) \sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}.$$

Pour $\alpha \rightarrow 0$, on a une expression plus simple de ℓ^0 :

$$\ell^0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin(x)}{1 - \cos(u) \cos(x)} \right)^2} du.$$



Corollaire

$\forall \epsilon > 0, \forall \ell \in (\sqrt{2}, 2], \exists \alpha \geq 0$ et une infinité d'indices n ,

$$\left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} - \ell \right| \leq \epsilon.$$

👉 On n'a pas universalité avec une asymptotique nodale variant de $\sqrt{2}$ à 2.

Synthèse

$\mu_\rho = \int \psi_\rho dx + \mu_s$	$\inf \psi_\rho > 0$	$\log(\psi_\rho) \in L^{1+\eta}$	$\mu_s = 0$ $\lambda(\{\psi_\rho = 0\}) > 0$	$\mu_\rho = \frac{\delta_\alpha + \delta - \alpha}{2}$ $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$
$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n}$	$\rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\rightarrow \frac{2\pi-2a}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2a}{\pi\sqrt{3}}$	$\nearrow$ $\sqrt{2} < \liminf < \limsup \leq 2$

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k f(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

où $(a_k)_{k \geq 1}$ i.i.d. centrés de variance 1.

Question

A-t-on universalité par rapport aux fonctions de base, i.e. quand $\cos, \sin \rightarrow f$ non-analytique?

Théorème

Soit $(a_k)_k$ i.i.d. ayant un moment d'ordre 4 et f polynomiale par morceaux avec raccords finis de classe $\mathcal{C}^q$ et minoration locale d'une dérivée j -ième. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(S_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\|f'\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}}}.$$

👉 L'hypothèse d'analytité est superflue et universalité de l'asymptotique nodale moyenne par rapport à la loi des coefficients.

Idées principales des preuves

Rappel: $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi].$

$f_n(\cdot)$ est un processus de classe $\mathcal{C}^1$ tel que

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbb{E}[f_n^2(x)] &= \frac{1}{n} \sum_{k, \ell=1}^n \rho(k - \ell) \cos((k - \ell)x) \\ &= \underbrace{K_n}_{\text{Fejér kernel}} * \mu_\rho(x) > 0 \\ \bullet \quad \mathbb{E}[f_n'(x)^2] &= \frac{1}{\alpha_n} L_n * \mu_\rho(x), \end{aligned}$$

avec L_n un noyau trigonométrique explicite et $\alpha_n = \frac{6}{(n+1)(2n+1)}$.

Comme on considère un processus lisse et non dégénéré, par la formule de Kac-Rice, on a

$$\mathbb{E} [\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\mathbb{E}[f'_n(x)^2]}{\mathbb{E}[f_n^2(x)]} - \left(\frac{\mathbb{E}[f_n(x)f'_n(x)]}{\mathbb{E}[f_n^2(x)]} \right)^2} dx.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{E} [\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha_n \mathbb{E}[f'_n(x)^2]}{n^2 \alpha_n \mathbb{E}[f_n^2(x)]} - \left(\frac{\mathbb{E}[f_n(x)f'_n(x)]}{n \mathbb{E}[f_n^2(x)]} \right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{n^2 \alpha_n} \frac{L_n * \mu_\rho(x)}{K_n * \mu_\rho(x)} - \left(\frac{K'_n * \mu_\rho(x)}{2n K_n * \mu_\rho(x)} \right)^2} dx. \end{aligned}$$

Cadre général

Les propriétés des noyaux trigonométriques permettent d'obtenir les convergences p.s. de type Fejér-Lebesgue suivantes:

$$L_n * \mu_\rho(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi_\rho(x),$$

$$K_n * \mu_\rho(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi_\rho(x),$$

$$\frac{1}{n} K'_n * \mu_\rho(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$n^2 \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3.$$

ADP: Si $\inf \psi_\rho > 0$, alors

$$\sqrt{\frac{1}{n^2 \alpha_n} \frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} - \left(\frac{K'_n * \psi_\rho(x)}{2n K_n * \psi_\rho(x)} \right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et est}$$

bornée.

Par convergence dominée:

$$\frac{\mathbb{E} [\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Question

Que dire du cas où ψ_ρ peut s'annuler sur un intervalle?

Examinons l'exemple

$$\psi_\rho(x)dx = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)dx.$$

On rappelle que $\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \sqrt{I_n(x)} dx$, où

$$\frac{1}{n} \sqrt{I_n(x)} := \sqrt{\frac{1}{n^2 \alpha_n} \underbrace{\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)}}_{\rightarrow \psi_\rho(x)} - \left(\underbrace{\frac{K'_n * \psi_\rho(x)}{2n K_n * \psi_\rho(x)}}_{\rightarrow 0} \right)^2}.$$

Strictement à l'intérieur] - a, a[: convergence dominée & Fejér-Lebesgue:

$$\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{\alpha_n K_n * \psi_\rho(x)} \rightarrow \frac{1}{3},$$

$\Rightarrow$ Uniformément, $\frac{1}{n} \sqrt{I_n(x)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$.

On rappelle que $\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \sqrt{I_n(x)} dx$, où

$$\frac{1}{n} \sqrt{I_n(x)} := \sqrt{\frac{1}{n^2 \alpha_n} \underbrace{\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)}}_{\rightarrow 0} - \left(\underbrace{\frac{K'_n * \psi_\rho(x)}{2n K_n * \psi_\rho(x)}}_{\rightarrow 0} \right)^2}.$$

Partie difficile $\rightarrow$ Sur $[-a, a]^c$: on a besoin d'asymptotique du second ordre

$$\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{\alpha_n K_n * \psi_\rho(x)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ Uniformément, $\frac{1}{n} \sqrt{I_n(x)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \sqrt{I_n(x)} dx, \text{ où}$$

$$\frac{1}{n} \sqrt{I_n(x)} := \sqrt{\frac{1}{n^2 \alpha_n} \frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} - \left(\frac{K'_n * \psi_\rho(x)}{2n K_n * \psi_\rho(x)} \right)^2}.$$

Dans un petit voisinage de $\pm a, 0$, (Prisker-Yeager, 2015), les contributions aux zéros sont négligeables.

Par additivité de la formule de Kac-Rice,

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} &= \frac{2\pi - 2a}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2a}{\pi\sqrt{3}} + 0 \\ &= \frac{\lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{\lambda(\{\psi_\rho \neq 0\})}{\pi\sqrt{3}}\end{aligned}$$

La même méthode fonctionne pour une combinaison finie d'indicatrices (Condition C.1).

Pour plus de généralité sur $\{\psi_\rho = 0\}$, on a besoin de davantage de régularité.

👉 Il n'y a pas universalité, l'asymptotique nodale variant de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ à $\sqrt{2}$.

Question

Que dire du cas où $\psi_\rho > 0$ p.s. & n'est plus minorée ?

Une autre stratégie se base sur un TCL à la Salem-Zygmund.

Rappel: $f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$, $t \in \mathbb{R}$, avec
 $(a_k)_{k \geq 1}$, $(b_k)_{k \geq 1}$ processus gaussiens μ -dépendants

Soit $X \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$, $\perp (a_k)_{k \geq 1}, (b_k)_{k \geq 1}$. On note $\mathbb{P}_X$ sa loi et $\mathbb{E}_X$ son espérance.

Lemme

Si f est une fonction 2π -périodique possédant un nombre fini de zéros, alors pour tout $0 < h < 2\pi$, on a

$$\begin{aligned} \frac{h}{2\pi} \times \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{N}(f, [x, x + h]) dx \\ &= \mathbb{E}_X [\mathcal{N}(f, [X, X + h])]. \end{aligned}$$

Lemme

Si f est une fonction 2π -périodique possédant un nombre fini de zéros, alors pour tout $0 < h < 2\pi$, on a

$$\begin{aligned}\frac{h}{2\pi} \times \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{N}(f, [x, x + h]) dx \\ &= \mathbb{E}_X [\mathcal{N}(f, [X, X + h])].\end{aligned}$$

Pour $h = \frac{2\pi}{n}$ et $f = f_n$, on obtient

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N} \left(f_n, \left[X, X + \frac{2\pi}{n} \right] \right) \right].$$

Lemme

Si f est une fonction 2π -périodique possédant un nombre fini de zéros, alors pour tout $0 < h < 2\pi$, on a

$$\begin{aligned}\frac{h}{2\pi} \times \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{N}(f, [x, x+h]) dx \\ &= \mathbb{E}_X [\mathcal{N}(f, [X, X+h])].\end{aligned}$$

Pour $h = \frac{2\pi}{n}$ et $f = f_n$, on obtient

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N} \left(f_n, \left[X, X + \frac{2\pi}{n} \right] \right) \right].$$

En posant $g_n(t) := f_n(X + t/n)$, $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X [\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])].$$

Théorème (Salem-Zygmund, 1954)

On suppose $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ des variables **i.i.d.** symétriques ayant un moment d'ordre 4. $\mathbb{P}$ -p.s., sous $\mathbb{P}_X$, on a la convergence en loi

$$g_n(0) = f_n(X) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

i.e. $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_X \left[e^{itf_n(X)} \right] = e^{-t^2/2}.$$

But: étendre le résultat au cas gaussien dépendant (TCL fonctionnel sur $\{g_n\}_n$) et obtenir une asymptotique $\mathbb{P}$ -p.s.

Théorème

On suppose $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ des processus gaussiens μ_ρ -dépendants $\mathbb{P}$ -p.s., sous $\mathbb{P}_X$, on a la convergence en loi

$$g_n(0) = f_n(X) \Rightarrow \sqrt{\psi_\rho(X)} \mathcal{N}(0, 1).$$

Théorème fonctionnel

$\mathbb{P}$ -p.s., $\{g_n(\cdot)\}_{n \geq 1} \in (\mathcal{C}^1([0, 2\pi]))^{\mathbb{N}}$ converge pour la topologie $\mathcal{C}^1$ vers g_∞ non-dégénéré donné par

$$g_\infty(t) = \sqrt{\psi_\rho(X)} N_t,$$

avec $(N_t)_t \perp X$ processus gaussien de covariance $\sin_c$.

Par le *continuous mapping theorem*, $\mathbb{P}$ -p.s., sous $\mathbb{P}_X$, on a

$$\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \Rightarrow \mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]).$$

Remarque:

- Contrairement au cas i.i.d., le processus limite n'est plus gaussien et fait apparaître ψ_ρ .
- On retrouve le cas indépendant ([Angst, Poly, 2020](#))
- *Méthode de preuve*: convergence f.d.d. + tension $\mathcal{C}^1$.

Pour $(g_n(t))_{t \in [0, 2\pi]} = (f_n(X + t/n))_{t \in [0, 2\pi]}$, on a

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X [\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])],$$

$$\frac{\mathbb{E} [\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X} [\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])].$$

Pour conclure que

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X [\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])] \rightarrow \mathbb{E}_X [\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])] = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

on prouve une estimée d'uniforme intégrabilité:

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}_X [|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta}] < \infty, \quad \eta > 0.$$

Pour montrer

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}_X \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta} \right] < \infty, \quad \eta > 0,$$

on se place sous les hypothèses:

- ψ_ρ est α -Hölder en norme L^1 :

$$\forall \delta > 0, \sup_{|h| \leq \delta} \|\psi_\rho(\cdot + h) + \psi_\rho(\cdot - h) - 2\psi_\rho(\cdot)\|_{L^1([0, 2\pi])} = O(\delta^\alpha),$$

- $\exists \gamma > 0, \frac{1}{\psi_\rho} \in L^\gamma([0, 2\pi])$

Ouvertures

Questions ouvertes

Borne inférieure pour μ_ρ générale

Pour tout processus gaussiens stationnaires μ_ρ -dépendants $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$\psi_\rho \in \mathcal{C}^1$ sans hypothèse de support

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{\lambda(\{\psi_\rho \neq 0\})}{\pi\sqrt{3}} + \frac{\lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{2}}.$$

Questions ouvertes

Conjecture

Si μ_ρ purement singulière, alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \geq \sqrt{2}.$$

Exemple: quand $\mathcal{L}(\mu_\rho) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n}\right)$ avec $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. $\mathcal{R}(1/2)$.
 Les simulations semblent suggérer que

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \rightarrow \sqrt{2}.$$

Réciproque

Si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \geq \sqrt{2}$, alors μ_ρ est purement singulière.

Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \leq \sqrt{2}$, alors μ_ρ admet une partie à densité.

Merci de votre attention.