THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE RENNES 1

ECOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication
Spécialité : Mathématiques et leurs Interactions

Par
Thibault PAUTREL

Quelques contributions à l'étude de l'universalité des zéros de fonctions trigonométriques aléatoires

Thèse présentée et soutenue à l'université de Rennes 1, le 10 janvier 2022
Unité de recherche : IRMAR (UMR 6625)

Rapporteurs avant soutenance :

Jean-Marc AZAÏS	Professeur, Université de Toulouse, France
Raphaël LACHIEZE-REY	Maître de conférences, Université de Paris, France

Composition du Jury :

Président :	Anne ESTRADE	Professeur, Université de Paris, France
Examinateurs :	Jean-Marc AZAÏS	Professeur, Université de Toulouse, France
	Raphaël LACHIEZE-REY	Maître de conférences, Université de Paris, France
	Vlad BALLY	Professeur, Université Gustave Eiffel, France
	Anne ESTRADE	Professeur, Université de Paris, France
	Federico DALMAO	Professeur, Universidad de la Republica, Salto, Uruguay
Dir. de thèse :	Guillaume POLY	Maître de conférences, Université de Rennes 1, France
Co-dir. de thèse :	Jürgen ANGST	Maître de conférences HDR, Université de Rennes 1, France

Manuscrit de thèse

Quelques contributions à l'étude de l'universalité des zéros de fonctions trigonométriques aléatoires

Thibault Pautrel

sous la direction de
Jürgen Angst & Guillaume Poly

4 janvier 2022

Table des matières

Remerciements

J'adresse mes premiers remerciements à mes deux directeurs Guillaume Poly et Jürgen Angst, qui m'ont encadré pendant ces trois années et grâce à qui cette thèse a pu voir le jour. Votre grande disponibilité, vos relectures attentives et remarques ont contribués grandement à la qualité de ce travail. Ce fut un réel plaisir de m'initier à la recherche sous votre supervision toujours bienveillante, rigoureuse et attentive.

Je remercie également Jean-Marc Azaïs et Raphaël Lachieze-Rey d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je suis également reconnaissant à Anne Estrade, Federico Dalmao et Vlad Bally de me faire l'honneur de participer au jury de cette soutenance.

Merci à Yann Neveu, qui m'a permis au cours de mes années universitaires, de m'offrir mes moments de déconnexion tennistiques hebdomadaires. Plus largement, merci à l'équipe du SIUAPS pour proposer aux étudiants une offre toujours plus fournie d'activités et qui, je pense, contribue également à la réussite de leurs études en les ouvrant sur des pratiques nouvelles.

Je souhaite remercier les professeurs de mathématiques qui se sont succédés au cours de ma scolarité puis de mes années universitaires pour m'avoir transmis leur passion du travail rigoureux et de la recherche de concision. C'est grâce à leur enseignement que j'ai pu maintenir cet esprit de curiosité propre aux mathématiques, celui qui pousse à comprendre toujours plus en profondeur les concepts et changer de point de vue lorsqu'il y a blocage.

Je remercie l'intégralité du personnel de l'IRMAR pour sa bienveillance, sa disponibilité et sa gentillesse. Merci également aux enseignants-chercheurs qui font vivre ce laboratoire.

J'ai une pensée pour mes anciens camarades doctorants, Emeline, Louis, Fabrice, Ninon et tant d'autres qui ont partagé le bureau 334, des déjeuners "crêperie" (merci Louis pour le bilig) ou pire, "raclette" (désolé Bernard pour l'odeur de fromage). Un merci spécial à Kévin pour ta disponibilité au cours de toutes ces heures de tennis qu'on a pu jouer.

Enfin, je remercie ma famille pour son soutien au cours de cette thèse et plus largement dans ma vie. Merci à Carolina d'avoir cru en moi jour après jour et d'avoir permis de faire de ces années de thèse des moments heureux en dehors du bureau.

Introduction

On s'intéresse dans cette thèse au nombre de zéros de fonctions trigonométriques aléatoires. Cette étude a de nombreuses motivations, purement mathématiques mais aussi appliquées, par exemple dans le domaine de télécommunications et du traitement du signal, l'océanographie et l'étude des hauteurs de vagues ou encore la physique et astronomie. Dans cette introduction, nous décrivons rapidement la problématique, survolons nos contributions et détaillons le plan du manuscrit.

Les objets principaux de notre étude. Commençons par décrire les objets centraux de cette thèse. Étant donnée une fonction continue F définie sur un intervalle quelconque I de la droite réelle, on désignera par $\mathcal{N}(F, I)$ le nombre de ses zéros

$$\mathcal{N}(F, I) := \{t \in I, F(t) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Nous nous intéresserons particulièrement au cas de fonctions aléatoires et périodiques construites comme suit : on se donne $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires centrées et de variance unitaire, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère alors les *polynômes trigonométriques aléatoires de degré* n :

$$F_n(t) := \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

et plus généralement, les *signaux périodiques aléatoires* de la forme

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{n} a_k f(kt),$$

où f est une fonction générique 2π-périodique à préciser. Le but principal de notre étude consistera alors à déterminer le comportement asymptotique (presque sûr, en loi), lorsque n tend vers l'infini, des variables aléatoires

$$\mathcal{N}(F_n, I) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(S_n, I),$$

ou encore de leurs moyennes

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(F_n, I)\right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\mathcal{N}(S_n, I)\right],$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance sous la loi $\mathbb{P}$ des coefficients. Il s'agira en particulier de comprendre en quoi la loi des coefficients aléatoires $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ influe sur le comportement asymptotique du nombre de zéros des fonctions associées.

Le phénomène d'universalité. Le fil conducteur de cette thèse est le caractère universel ou non de l'asymptotique nodale évoquée plus haut. À titre de comparaison, le théorème limite central est une pierre angulaire de la théorie des probabilités et l'archétype des phénomènes d'universalité. Si (Y_k) est une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance unitaire, ce théorème affirme que la suite

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une variable gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. Le phénomène d'universalité fait ici précisément référence au fait que la limite en loi ci-dessus est une variable gaussienne centrée réduite et ce quelle que soit la loi initiale commune des variables (Y_k). Si l'on revient aux zéros de fonctions aléatoires, de façon similaire, on dira que l'asymptotique du nombre de zéros est universelle si celle-ci ne dépend pas de loi des coefficients aléatoires (a_k) et (b_k). Dans le cas contraire, on parlera d'asymptotique non-universelle et l'on cherchera alors naturellement à préciser en quoi celle-ci dépend de la loi des coefficients, de leur corrélation, des fonctions cos, sin ou f, de leur régularité, etc.

Dans cette optique, on s'intéressera à des résultats d'*universalité globale*, c'est-à-dire à l'échelle macroscopique de l'intervalle $[0, 2\pi]$ tout entier, mais aussi à des résultats d'*universalité locale*, par exemple en considérant le nombre de zéros de fonctions aléatoires dans des intervalles de taille $1/n$, i.e. dont la taille décroit avec le degré. Parmi la littérature abondante sur les phénomènes d'universalité locale ou globale, on pourra par exemple consulter les articles suivants [IKM16, APP18, DNV18, BCP19] et les références incluses.

Universalité dans le cas indépendant. Les premiers résultats concernant le nombre de zéros de fonctions trigonométriques aléatoires remontent aux années 1960, précisément à [Dun66] qui amontré que si les coefficients (a_k) sont des variables gaussiennes indépendantes centrées réduites et si

$$f_n(t) := \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt),$$

alors, correctement normalisé par le degré, pour tout intervalle $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$, le nombre moyen de zéros vérifie l'asymptotique suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [a,b])\right]}{n} = \frac{b-a}{\pi\sqrt{3}}, \quad \text{en particulier} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0,2\pi])\right]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Au début des années 1970, en adaptant la preuve originale de Dunnage, Qualls prouve dans [Qua70] que si les suites indépendantes (a_k) et (b_k) sont toutes deux formées de variables gaussiennes indépendantes centrées et réduites, alors le nombre moyen de zéros de la fonction F_n introduite plus haut vérifie exactement la même asymptotique, autrement dit on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(F_n, [a,b])\right]}{n} = \frac{b-a}{\pi\sqrt{3}}.$$

Si l'on se place dans le cas de coefficients aléatoires indépendants, il a fallu attendre de nombreuses années pour établir que l'asymptotique en moyenne ci-dessus est en fait universelle. Ce résultat remarquable est dû à Flasche dans [Fla17]. Pour $u \in \mathbb{R}$, considérant le polynôme trigonométrique

$$X_n(t) := u + \frac{1}{\sqrt{n}} F_n(t),$$

où les suites indépendantes (a_k) et (b_k) sont formées de variables i.i.d. centrées réduites (mais pas nécessairement gaussiennes), il a en effet établi le résultat d'universalité globale suivant : pour tout intervalle $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(X_n, [a, b])\right]}{n} = \frac{b-a}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{1}$$

Autrement dit, dans le cas de ces polynômes trigonométriques aléatoires, avec des coefficients indépendants centrés de variance unitaire – pour $u = 0$ dans notre modèle – l'asymptotique du nombre moyen de zéros est la même que l'asymptotique obtenue pour des coefficients gaussiens standards obtenue un demi siècle plus tôt. Au premier ordre, dans le cas de coefficients indépendants, l'asymptotique du nombre moyen de zéros est donc universelle.

A contrario, la variance du nombre de zéros, décrite pour la première fois dans le cas de coefficients gaussiens indépendants dans [GW11] et ensuite étudiée sous d'autres aspects dans [AL21, ADL16], n'obéit pas à ce même type de phénomène d'universalité globale. Dans les travaux de [DNN20], les auteurs généralisent les résultats de [BCP19] et prouvent que, toujours dans le cas de coefficients i.i.d. centrés réduits, sous la seule hypothèse d'existence d'un moment suffisamment grand sur les coefficients aléatoires, l'asymptotique de la variance n'est pas en général égale à celle obtenue pour des coefficients gaussiens mais dépend du kurtosis des coefficients, i.e. de la différence $\mathbb{E}[a_1^4] - 3$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{Var}(\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi]))}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{Var}(\mathcal{N}(F_n^{(G)}, [0, 2\pi]))}{n} + \frac{2}{15}\mathbb{E}[a_1^4 - 3],$$

où $F_n^{(G)}$ désigne le polynôme trigonométrique F_n dont les coefficients sont i.i.d. gaussiens standards. Autrement dit, le phénomène d'universalité est plus complexe qu'il ne pourrait y paraître au vu de l'asymptotique du premier ordre. Il est à noter que, même dans le cas gaussien et a fortiori dans le cas indépendant plus général, l'étude de l'asymptotique au second ordre du nombre de zéros nécessite un arsenal technique bien plus conséquent que celle de la simple moyenne.

À travers l'étude des différents modèles de fonctions trigonométriques aléatoires, l'objectif cette thèse est donc de mieux cerner ce phénomène d'universalité. Nos résultats permettent en particulier de mieux comprendre en quoi la corrélation des coefficients aléatoires (a_k) et (b_k) influe sur l'asymptotique nodale, et de la même façon en quoi elle dépend / ne dépend pas de l'analycité des fonctions mises en jeu.

(Non-)universalité dans le cadre gaussien dépendant. Le résultat d'universalité globale obtenu par Flasche dans [Fla17] dans le cadre de coefficients indépendants invite naturellement à investiguer l'asymptotique du nombre moyen de zéros de polynômes trigonométriques aléatoires avec des coefficients **dépendants**. C'est précisément l'objectif des articles [Pau20] et [APP21a] qui font l'objet des chapitres 3 et 4 de la partie II de ce manuscrit. Le cadre commun de ces deux articles est le suivant : les suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ sont toujours indépendantes, mais chacune des suites est un processus gaussien stationnaire centré réduit, associé à une fonction de corrélation ρ, autrement dit

$$\rho(|k-\ell|) := \mathbb{E}[a_k a_\ell] = \mathbb{E}[b_k b_\ell].$$

Par le théorème de Bochner–Herglotz, on peut exprimer de manière bijective la fonction de corrélation ρ comme la transformée de Fourier d'une mesure finie μ_ρ sur $[0, 2\pi]$, appelée *mesure spectrale* associée

$$\rho(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi k} \mu_\rho(d\xi).$$

Nous verrons plus loin que, de façon assez surprenante, la nature de la mesure spectrale μ_ρ influe sur le comportement asymptotique du nombre moyen de zéros de la fonction aléatoire F_n. Plus précisément, nous verrons

— au chapitre 3 que lorsque la mesure spectrale μ_ρ est purement discrète, par exemple lorsque $\rho(k) = \cos(k\alpha)$ avec $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, i.e. $\mu_\rho = (\delta_{-\alpha} + \delta_{-\alpha})/2$, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])\right]}{n} \neq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])\right]}{n}$$

en exhibant tout un continuum de valeurs d'adhérence possibles ;

— au chapitre 4 que si la mesure spectrale μ_ρ admet une composante absolument continue de densité ψ_ρ par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0, 2\pi]$, alors l'asymptotique est non-universelle dès lors que la densité ψ_ρ s'annule sur un ensemble de mesure positive, précisément

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{\lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2\pi - \lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{3}};$$

— également au chapitre 4 que si $\psi_\rho > 0$ admet un moment logarithmique, alors l'asymptotique universelle a lieu au sens presque sûr et pas seulement en moyenne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ces résultats montrent en particulier qu'il existe des fonctions de corrélation ρ qui décroissent vers zéro de façon arbitrairement rapide à l'infini et qui pourtant donnent lieu à des asymptotiques nodales non-universelles et à l'inverse, il existe des fonctions de corrélation qui décroissent vers zéro de façon arbitrairement lente et qui pourtant donnent lieu à des asymptotiques nodales universelles. Le paramètre saillant n'est ainsi pas la vitesse de décorrélation mais l'existence et la positivité d'une densité spectrale.

Signaux périodiques aléatoires non-analytiques. Les polynômes trigonométriques aléatoires f_n ou F_n évoqués plus haut appartiennent à une large classe de fonctions aléatoires analytiques du type

$$G_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \phi_k(x),$$

où $(\phi_k)_{k\geq 1}$ est une suite de fonctions analytiques déterministes et $(\xi_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables i.i.d à valeurs complexes. Dans cette même classe se trouvent notamment les polynômes algébriques aléatoires qui correspondent au cas où $\phi_k(x) = c_k x^k$, avec comme cas particuliers

- les polynômes de Kac où $c_k = 1$, modèle historique introduit par M.Kac dans [Kac43] et qui a été étudié extensivement (voir e.g. [Mas74, Pri18, PS14]),
- les polynômes de Weyl où $c_k = \frac{1}{\sqrt{k!}}$ (voir [DV20, EK95, TV15]),
- les polynômes elliptiques, où $c_k = \sqrt{\binom{n}{k}}$ (voir [Dal15, Kos93]).

Pour tous ces modèles algébriques, l'asymptotique des ensembles nodaux a été largement étudiée et de nombreux théorèmes d'universalité (globale et/ou locale) ont été établis dans le cadre de coefficients $(\xi_k)_{k\geq 0}$ indépendants avec de faible conditions de moments, voir par exemple les travaux récents et quasi optimaux de Nguyen et Vu [NV18]. Il est remarquable de noter que ces résultats d'universalité reposent de façon cruciale sur la formule de Jensen qui permet précisément d'exprimer le nombre de zéros d'une fonction analytique par une intégrale réelle. Aussi, il est légitime de s'interroger sur les relations entre l'analycité des fonctions considérées et l'asymptotique nodale. Si l'on a en tête le principe des zéros isolés, il peut sembler par exemple légitime d'affirmer que la régularité de la fonction sous-jacente a une incidence importante sur la répartition de ses zéros.

Pour mieux comprendre l'influence de la régularité sur l'asymptotique nodale, un modèle naturel qui généralise celui des polynômes trigonométriques aléatoires au cadre non-analytique consiste à considérer les fonctions aléatoires déjà mentionnées plus haut, à savoir

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

où les coefficients $(a_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants centrés de variance unitaire et f une fonction générale continue, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux et non-analytique, par exemple la fonction triangle de la Figure 1 ci-après. La problématique est alors de savoir en quoi l'asymptotique nodale dépend de la fonction f, par exemple de sa norme, celle de sa dérivée, de sa régularité, ou tout autre caractéristique.

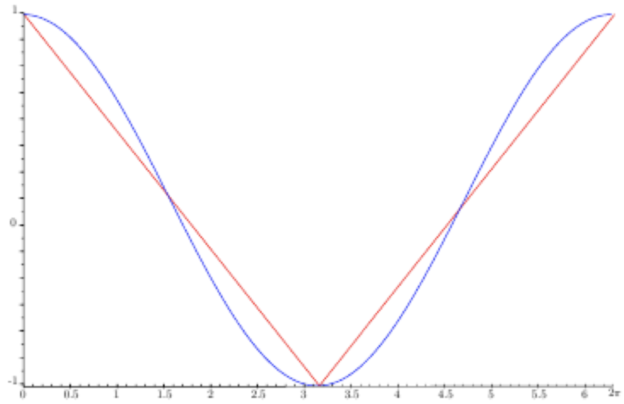

FIGURE 1 – En bleu, cos, en rouge le signal triangulaire qui l'interpole.

Ce modèle a été étudié par Angst et Poly dans [AP20b], ces derniers ont obtenu un résultat d'universalité locale sous un compromis entre existence de moments pour les coefficients (a_k) et régularité de la fonction générale f i.e. moins on demande de régularité sur la fonction f, plus les coefficients (a_k) doivent être intégrables. Dans l'article [APP21b] qui fait l'objet du chapitre 5 de la partie II du manuscrit, nous généralisons ce résultat en un énoncé d'universalité globale. Sous de relativement faibles hypothèses détaillées plus loin, nous établissons en effet l'asymptotique suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(S_n,[0,2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\|f'\|_2}{\|f\|_2}}.$$

On retrouve naturellement au passage l'asymptotique universelle du cas trigonométrique lorsque $f(x) = \cos(x)$. La preuve semble montrer qu'une régularité lipschizienne pour la fonction f est critique, en particulier le signal triangulaire ci-dessus échappe malheureusement à notre approche. Néanmoins, cette dernière permet de conclure pour de nombreux signaux polynomiaux par morceaux avec des raccords suffisamment lisses et montre donc que l'hypothèse d'analycité est superflue pour établir le caractère universel de l'asymptotique nodale.

Plan du manuscrit. Dans la première partie du manuscrit, rédigée en français, nous commençons par rappeler au Chapitre 1 quelques outils standards pour le comptage de zéros de fonctions déterministes et aléatoires (formule de Kac–Rice, estimés de discrépance, régularité de la fonctionnelle "nombre de zéros", TCL à la Salem–Zygmund, etc.). Au Chapitre 2, nous décrivons ensuite de façon synthétique nos principales contributions en détaillant les méthodes et approches utilisées. Ces différentes contributions sont au nombre de trois, et font l'objet des trois publications cités plus loin.

La partie II du manuscrit, rédigée en anglais, est composée des Chapitres 3, 4 et 5 qui reprennent pour l'essentiel les articles (parus ou à paraître) issus de cette thèse, à savoir les références [Pau20], [APP21a] et [APP21b].

Première partie

Folklore et synthèse des contributions

Chapitre 1

Quelques outils et méthodes pour le comptage des zéros

Avant de décrire de façon synthétique nos principales contributions à l'étude de l'universalité de l'asymptotique du nombre de zéros de fonctions trigonométriques aléatoires, nous rappelons dans ce chapitre quelques outils et méthodes classiques pour le comptage des zéros de fonctions réelles. Ces outils et méthodes constituent l'arsenal de base sur lequel s'appuient nos différents travaux.

1.1 Formules de Kac et Kac–Rice

Rappelons que si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{N}(f, [a, b]) = \mathrm{Card}\{t \in [a, b], f(t) = 0\}$$

le nombre de zéros de f dans l'intervalle. Une première approche féconde pour l'étude des zéros, initiée par Kac dans [Kac43] consiste à établir une / des formules intégrale(s) pour exprimer ce cardinal. Les résultats classiques énoncés ici ainsi que leur preuves sont tirés de [AW09], plus particulièrement des Chapitres 1 et 3.

Définition 1.1.1. *On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est non-dégénérée sur $[a, b]$ si $f(a)f(b) \neq 0$ et si elle n'a pas de zéro double, i.e. si*

$$\inf_{x \in [a,b]} |f(x)| + |f'(x)| > 0.$$

La *formule de Kac* ci-dessous, qui peut-être vue comme une version unidimensionelle de la formule de la co-aire, permet précisément d'exprimer le nombre de zéros d'une fonction non-dégénérée de classe $\mathcal{C}^1$ comme une fonctionnelle intégrale de la fonction et de sa dérivée.

Lemme 1.1.1 (Formule de Kac)**.** *On suppose $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ non-dégénérée sur $[a, b]$. Alors,*

$$\mathcal{N}(f, [a, b]) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{[a,b]} \mathbb{1}_{|f(t)|<\delta} |f'(t)| dt. \tag{1.1}$$

Démonstration. Sous les hypothèses précédentes, la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet un nombre fini de zéros $\tau_1 < \cdots < \tau_n$, que l'on suppose supérieur à 1. Comme $f'(\tau_k) \neq 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, pour $\delta > 0$ assez petit, on peut écrire que

$$f^{-1}((-\delta, \delta)) = \bigcup_{k=1}^{n} I_k,$$

où l'union est disjointe avec chaque intervalle $I_1, \ldots, I_n$ contenant respectivement les points $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Sur chaque I_k, la fonction f est monotone et par un changement de variable, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a

$$\int_{I_k} |f'(t)| dt = 2\delta.$$

Ainsi pour $\delta > 0$ suffisamment petit,

$$\frac{1}{2\delta} \int_{[a,b]} \mathbb{1}_{|f(t)|<\delta} |f'(t)| dt = \frac{1}{2\delta} \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} |f'(t)| dt = n.$$

$\square$

Remarque 1.1.1. *Plus généralement, on peut obtenir une formule analogue pour compter le nombre de traversées de la ligne de niveau $u \geq 0$ sur un intervalle $[a,b]$. En effet, si l'on suppose $f \in \mathcal{C}^1$ telle que $f(a) \neq u, f(b) \neq u$ et $\{t \in I, f(t) = u, f'(t) = 0\} = \emptyset$, alors*

$$Card\{t \in [a,b], f(t) = u\} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{[a,b]} \mathbb{1}_{|f(t)-u|<\delta} |f'(t)| dt.$$

De plus, la formule de Kac donnée par le Lemme 1.1.1 reste vraie si f est polygonale alors qu'elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Si $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$ est une partition de $[a,b]$ et f une fonction polygonale dont les arcs se raccordent aux noeuds $(a_i, f(a_i))$ pour $i = 0, \ldots, m$, alors dès que $f(a_i) \neq 0$, on a (1.1). En effet, la formule est satisfaite pour chaque intervalle $J_i = [a_i, a_{i+1}]$ où $i = 0, \ldots, m-1$ donc sur $[a,b]$ par additivité. De plus, comme f est polygonale, la quantité

$$\frac{1}{2\delta} \int_{[a,b]} \mathbb{1}_{|f(t)|<\delta} |f'(t)| dt$$

est majorée par m étant donné que chaque intégrale sur la partition $[a_i, a_{i+1}]$ est bornée par 1 si elle contient un zéro et par $1/2$ sinon.

Si l'on souhaite appliquer la formule de Kac ci-dessus dans un cadre stochastique, on doit donc naturellement s'assurer que le processus considéré est presque sûrement non-dégénéré. Le résultat suivant (Proposition 1.20, Chapitre 1 dans [AW09]), connu sous le nom de Lemme de Bulinskaya, permet de donner un critère de non-dégénérescence lorsque l'on considère des processus stochastiques, en terme d'uniforme majoration de densités.

Lemme 1.1.2 (Bulinskaya, 1961)**.** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs réelles. Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}^+$. On suppose que :*

1. *les trajectoires $t \mapsto X_t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$,*
2. *pour tout $t \geq 0$, X_t possède une densité et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in I$ et x au voisinage de u,*

$$p_{X_t}(x) \leq C.$$

Alors presque-surement, aucun point $t \geq 0$ n'est tel que $X_t = 0$ et $X'_t = 0$.

Démonstration. Soit $Z_0 := \{t \in I \mid X_t = 0 \text{ et } X'_t = 0\}$ l'ensemble (aléatoire) des zéros doubles. Soit $\omega_{X'}$ le module de continuité de $t \mapsto X'_t$. Fixons $\epsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ assez petit pour que

$$\mathbb{P}\left(\omega_{X'}(I,\delta) > \epsilon\right) \leq \epsilon.$$

On découpe $I = [a,b]$ en m sous-intervalles réguliers $[t_j, t_{j+1}]$ de taille δ. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_0 \neq \emptyset\right) &= \mathbb{P}\left(\{Z_0 \neq \emptyset\} \cap \{\omega_{X'}(I,\delta) > \epsilon\}\right) + \mathbb{P}\left(\{Z_0 \neq \emptyset\} \cap \{\omega_{X'}(I,\delta) \leq \epsilon\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\omega_{X'}(I,\delta) > \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(\{Z_0 \neq \emptyset\} \cap \{\omega_{X'}(I,\delta) \leq \epsilon\right) \\
&\leq \epsilon + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}\left(\{Z_0 \cap [t_j, t_{j+1}] \neq \emptyset\} \cap \{\omega_{X'}(I,\delta) \leq \epsilon\}\right) \\
&\leq \epsilon + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(|X_{t_j}| \leq \delta\epsilon).
\end{aligned}$$

En effet, si $Z_0 \cap [t_j, t_{j+1}] \neq \emptyset$, il existe $\alpha \in [t_j, t_{j+1}]$ tel que $X_\alpha = X'_\alpha = 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\beta \in [t_j, \alpha] \subset [t_j, t_{j+1}]$ tel que

$$X_{t_j} = X_{t_j} - X_\alpha = (t_j - \alpha)X'_\beta = (t_j - \alpha)(X'_\beta - X'_\alpha).$$

Sur l'évènement $\{\omega_{X'}(I,\delta) \leq \epsilon\}$, on a alors

$$|X_{t_j}| \leq |t_j - \alpha| \times |X'_\beta - X'_\alpha| \leq \delta\epsilon.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\{Z_0 \cap [t_j, t_{j+1}] \neq \emptyset\} \cap \{\omega_{X'}(I,\delta) \leq \epsilon\right) \leq \mathbb{P}(|X_{t_j}| \leq \delta\epsilon).$$

Comme $\mathbb{P}(|X_s| \leq \delta\epsilon) = \int_{[-\delta\epsilon,\delta\epsilon]} p_{X_s}(x)dx \leq 2C\delta\epsilon$, au final,

$$\mathbb{P}(Z_0 \neq \emptyset) \leq \epsilon + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(|X_{t_j}| \leq \delta\epsilon) \leq \epsilon + mC\delta\epsilon \leq \epsilon + C|t_{j+1} - t_j|\epsilon.$$

□

Dans le cadre de processus gaussiens, la positivité de la densité est naturellement liée à la finitude de la variance. Aussi, on a le résultat remarquable et particulièrement effectif suivant (Théorème 1.21, Chapitre 1 dans [AW09]).

Lemme 1.1.3 (Ylvisaker, 1968)**.** *Soit $a < b$ deux réels. Soit $(X_t)_{t\in[a,b]}$ un processus gaussien à trajectoires continues et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

$$\forall t \in [a,b], \quad Var(X_t) > 0.$$

Alors, $\mathbb{P}$-p.s., il n'existe aucun extrema local de X prenant la valeur 0.

Il est à noter que la formule de Kac (1.1) est une formule asymptotique. Il est cependant possible d'obtenir des formules intégrales closes pour exprimer le nombre de zéros, quitte à supposer un peu plus de régularité pour la fonction de base. Par exemple, dans [AP20a], Angst et Poly établissent les formules suivantes.

Proposition 1.1.1. *Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,2\pi])$ une fonction 2π-périodique. Soit F est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que*

$$\lim_{-\infty} F = -1, \quad \lim_{+\infty} F = 1,$$

alors

$$\mathcal{N}(f,[0,2\pi]) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} F'\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx.$$

En particulier

$$\mathcal{N}(f,[0,2\pi]) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f''(x)f(x) - f'(x)^2)\frac{|f(x)|}{(f^2(x)+f'(x)^2)^{3/2}}dx.$$

Remarque 1.1.2. *En particulier, la dernière formule est valable pour $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ou encore $F(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$. Pour cette dernière, on obtient alors la formule particulièrement compacte*

$$\mathcal{N}(f,[0,2\pi]) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2+f'(x)^2}dx.$$

Notons que cette approche peut être généralisé au cas non-périodique.

On présente maintenant la formule dite de Kac–Rice, qui consiste à combiner la formule de Kac et le passage à l'espérance, pour exprimer le nombre moyen de zéros sur un intervalle d'un processus gaussien à trajectoires $\mathcal{C}^1$.

Théorème 1.1.1. *Soit I un intervalle réel et soit $X = (X_t)_{t\in I}$ un processus gaussien à trajectoires $\mathcal{C}^1$. On suppose que la loi de X_t est non-dégénérée pour tout $t \in I$. Alors*

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(X,I)\right] = \int_I \mathbb{E}\left[|X_t'| \mid X_t = 0\right] p_{X_t}(0)dt.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $I = [0,1]$. Soit X_t^n l'approximation dyadique de X_t, i.e. pour $k = 0,\dots,2^n$, si $k/2^n \le t \le (k+1)/2^n$,

$$X_t^n := (k+1-2^n t)X_{\frac{k}{2^n}} + (2^n t - k)X_{\frac{k+1}{2^n}}.$$

On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in I} |X_t^n - X_t| = 0 \;\text{ et }\; |X_t^n - X_t| \leq 2 \sup_{t\in I} |X_t|.$$

La variable $\sup_{t\in I} |X_t|$ possède des moments de tout ordre ainsi par convergence dominée, on en déduit que $\mathrm{Var}(X_t^n)$ converge uniformément pour $t \in I$ vers $\mathrm{Var}(X_t)$. En outre, pour n suffisamment grand, il existe $b > 0$ pour lequel pour tout $t \in I$, $\mathrm{Var}(X_t^n) \geq b$. Comme X_t est une variable a densité pour tout $t \in I$, le processus $(X_t^n)_{t\in I}$ ne s'annule pas sur les points $k/2^n$ avec $k = 0, \ldots, 2^n$, ceci pour n suffisamment grand. En appliquant la formule de Kac (1.1) à la fonction polygonale X^n, on a $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\mathcal{N}(X^n, I) = \lim_{\delta\to 0} \underbrace{\frac{1}{2\delta} \int_I \mathbb{1}_{|X_t^n|<\delta} |{X^n}'_t| \, dt}_{\leq 2^n}.$$

Par convergence dominée en $\delta \to 0$ à n fixé,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathcal{N}(X^n, I)\right] &= \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\delta} \int_I \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|X_t^n|<\delta} |{X^n}'_t|\right] dt \\ &= \lim_{\delta\to 0} \int_I dt \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \mathbb{E}\left[|{X^n}'_t| \mid X_t^n = x\right] p_{X_t^n}(x) dx. \end{aligned}$$

Comme le processus X^n est à trajectoires continues, sa fonction moyenne $m(t)$ et covariance $r(s,t)$ sont continues. Par ailleurs, la fonction $(t,x) \mapsto \mathbb{E}\left[|{X^n}'_t| \mid X_t^n = x\right] p_{X_t^n}(x)$ est continue et est donc bornée pour $t \in I$ et x dans un voisinage compact de 0. En particulier, cela implique que l'on puisse passer à la limite dans le membre de droite de l'égalité précédente, i.e.

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(X^n, I)\right] = \int_I \mathbb{E}\left[|{X^n}'_t| \mid X_t^n = 0\right] p_{X_t^n}(0) dt.$$

Il reste à prendre la limite quand n tend vers l'infini dans l'égalité précédente. Le théorème d'Ylvisaker 1.1.3 permet d'affirmer qu'avec probabilité 1, il n'existe pas d'extremum en zéro donc $\mathbb{P}$-p.s., $\mathcal{N}(X^n, I)$ tend en croissant vers $\mathcal{N}(X, I)$ de sorte que par convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\mathcal{N}(X^n, I)\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{N}(X, I)\right].$$

Enfin, quand n tend vers l'infini, l'espérance et la matrice de covariance de $(X_t^n, {X^n}'_t)$ converge uniformément vers l'espérance et la matrice covariance de $(X_t, {X'}_t)$. Ceci implique la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \mathbb{E}\left[|{X^n}'_t| \mid X_t^n = 0\right] p_{X_t^n}(0) dt = \int_I \mathbb{E}\left[|X_t'| \mid X_t = 0\right] p_{X_t}(0) dt.$$

$\square$

Remarque 1.1.3. *Comme l'espérance* $\mathbb{E}[\mathcal{N}(X,I)]$ *s'exprime comme l'intégrale d'une fonction bornée sur un intervalle borné, elle est finie.*

De la formule précédente, un calcul explicite est possible pour l'espérance conditionnelle car la loi de $F_n'(t)$ sachant $\{F_n(t)=0\}$ est elle-même gaussienne et explicite. Plus précisément, on a la proposition suivante (Proposition 1.2 p.15 dans [AW09]).

Proposition 1.1.2. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles telles que la loi jointe de* (X,Y) *est gaussienne avec* $Var(Y)\neq 0$*. Alors pour toute fonction bornée* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, on a pour presque-tout* $y\in\mathbb{R}$ *:*

$$\mathbb{E}\left[f(X)\mid Y=y\right]=\mathbb{E}\left[f(\tilde{X}+Cy)\right],$$

où

$$C:=\frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)},$$

et $\tilde{X}$ *est une variable aléatoire gaussienne* $\mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X]-C\mathbb{E}[Y],\, Var(X)-\frac{Cov(X,Y)^2}{Var(Y)}\right)$.

Esquisse de preuve. Le paramètre C est choisi de sorte que $\tilde{X}=X-CY$ soit indépendant de Y, autrement dit tel que

$$\mathrm{Cov}(X-CY,Y)=0.$$

Comme

$$\mathrm{Cov}(X-CY,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-C\mathrm{Var}(Y),$$

les variables $\tilde{X}$ et Y sont orthogonales pour $C=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}$ et on en déduit la loi de $\tilde{X}$. □

En particulier, cette proposition permet d'affirmer que si (X,Y) est un vecteur gaussien centré avec $\mathbb{E}[Y^2]\neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $Y=0$ est

$$\mathcal{N}\left(0,\mathbb{E}[X^2]-\frac{\mathbb{E}[XY]^2}{\mathbb{E}[Y^2]}\right).$$

À titre illustratif dans le cadre gaussien, et sous réserve de non-dégénérescence, nous pouvons par exemple appliquer la formule de Kac–Rice aux objets centraux de cette thèse, à savoir les processus périodiques

$$F_n(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt),\quad t\in[0,2\pi]$$

avec $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux suites indépendantes entre elles de variables gaussienne centrés réduites.

Corollaire 1.1.1. *Soit* $(F_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ *un polynôme trigonométrique aléatoire de la forme ci-dessus dont on suppose qu'il est presque sûrement non-dégénéré. Alors pour tout intervalle* $I\subset[0,2\pi]$*,*

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(F_n,I)]=\frac{1}{\pi}\int_{[0,2\pi]}\sqrt{\frac{\mathbb{E}[F_n'(t)^2]}{\mathbb{E}[F_n(t)^2]}-\left(\frac{\mathbb{E}[F_n(t)F_n'(t)]}{\mathbb{E}[F_n(t)^2]}\right)^2}dt.$$

Démonstration. Le processus $(F_n(t), F_n'(t))_{t\in[0,2\pi]}$ est gaussien, centré et de matrice de covariance donnée par

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}[F_n(t)^2] & \mathbb{E}[F_n(t)F_n'(t)] \\ \mathbb{E}[F_n(t)F_n'(t)] & \mathbb{E}[F_n'(t)^2] \end{pmatrix}.$$

Conditionnellement à $\{F_n(t)=0\}$,d'après la Proposition 1.1.2, la loi de $F_n'(t)$ est gaussienne centrée de covariance

$$\Gamma_n := \mathbb{E}[F_n'(t)^2] - \frac{\mathbb{E}[F_n'(t)F_n(t)]^2}{\mathbb{E}[F_n(t)^2]}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|F_n'(t)| \mid F_n(t)=0\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma_n}} e^{-\frac{y^2}{2\Gamma_n}} dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\Gamma_n}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, la densité de $F_n(t)$ évaluée en zéro est

$$p_{F_n(t)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbb{E}[F_n(t)^2]}}.$$

Ainsi, on a bien

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(F_n,[0,2\pi])\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\mathbb{E}[F_n'(t)^2]}{\mathbb{E}[F_n(t)^2]} - \left(\frac{\mathbb{E}[F_n(t)F_n'(t)]}{\mathbb{E}[F_n(t)^2]}\right)^2} dt.$$

$\square$

Ainsi, dans le cadre gaussien, comprendre l'asymptotique du nombre moyen de zéros se réduit à étudier l'asymptotique des fonctions de covariance $\mathbb{E}[F_n(t)^2], \mathbb{E}[F_n'(t)^2]$ et $\mathbb{E}[F_n(t)F_n'(t)]$.

Exemple du cas indépendant. On applique la formule précédente au polynome trigonométrique aléatoire

$$F_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0,2\pi],$$

dans le cas où les suites $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et les variables a_k et b_k sont toutes i.i.d. de loi gaussienne standard. Dans ce cadre, remarquons que la covariance $\mathbb{E}[F_n(t)F_n(s)]$ ne dépend que de la différence $t-s$:

$$\mathbb{E}[F_n(t)F_n(s)] = \sum_{k=1}^n (\cos(kt)\cos(ks) + \sin(kt)\sin(ks)) = \sum_{k=1}^n \cos(k(t-s)).$$

En particulier, on obtient pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$\mathbb{E}[F_n(t)^2] = n, \qquad \mathbb{E}[F_n'(t)^2] = \sum_{k=1}^n k^2, \qquad \mathbb{E}[F_n'(t)F_n(t)] = 0.$$

Par le lemme d'Ylvisaker, on peut ainsi affirmer que le processus est presque sûrement non-dégénéré et en appliquant le Corollaire 1.1.1, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])\right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}} dt \sim \frac{2}{\sqrt{3}} n.$$

On retrouve ainsi en particuler le résultat fondateur de Dunnage dans [Dun66].

Pour clore cet section dédiée à la formule de Kac–Rice, notons qu'il est naturellement possible d'établir des formules intégrales similaires pour les moments (factoriels) du nombre de zéros, voir [AW09]. On pourra par exemple consulter l'article [GW11] et en particulier le Corollaire 2.5 pour obtenir une formule explicite pour la variance du nombre de zéros des polynômes trigonométriques F_n dans le cas de coefficients gaussiens i.i.d.

1.2 Noyaux trigonométriques et leur asymptotique

Comme évoqué plus haut, dans un cadre gaussien général et via la formule de Kac–Rice, comprendre l'asymptotique du nombre moyen de zéros du processus $F_n(t)$

$$F_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

se réduit à étudier l'asymptotique des fonctions de covariance $\mathbb{E}[F_n(t)^2], \mathbb{E}[F_n'(t)^2]$ et $\mathbb{E}[F_n(t)F_n'(t)]$. Comme remarqué dans [ADP19], dans le cas où les coefficients (a_k) et (b_k) ne sont plus indépendants, mais forment des processus gaussiens stationnaires associés à une fonction de corrélation ρ, i.e.

$$\mathbb{E}[a_k a_l] = \mathbb{E}[b_k b_l] = \rho(k - l),$$

les fonctions de covariance ci-dessus s'expriment de façon remarquable comme des convolutions de la mesure spectrale associée avec des noyaux trigonométriques explicites. Rappelons que la mesure spectrale μ_ρ associée à ρ par le théorème de Bochner–Herglotz n'est autre que sa transformée de Fourier, i.e.

$$\rho(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \mu_\rho(dx).$$

On adoptera ici la convention suivante : si f et g sont deux fonctions 2π-périodiques bornées, et μ une mesure de probabilité sur $[0, 2\pi]$,

$$f * \mu(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) \mu(dy).$$

Remarque 1.2.1. *Notons qu'au Chapitre 4, la définition de la convolution fait apparaître un facteur de renormalisation* $\frac{1}{2\pi}$, *i.e.*

$$f * \mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\mu(dy).$$

Les noyaux trigonométriques évoqués ci-dessus permettant d'exprimer les fonctions de covariance ne sont autres que le noyau de Fejér

$$K_n(x) := \sum_{r=-n}^{n} \left(1 - \frac{|r|}{n}\right) e^{irx} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2,$$

et la variante suivante du noyau de Fejér

$$L_n(x) := \alpha_n \sum_{r=-n}^{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-|r|} k(|r|+k) \right) e^{irx}, \quad \text{où} \quad \alpha_n := \frac{6}{(n+1)(2n+1)}.$$

En effet, on a le résultat suivant.

Lemme 1.2.1. *Si les suites* (a_k) *et* (b_k) *sont indépendantes et données par des processus gaussiens de corrélation* ρ, *alors pour tout* $t \in [0, 2\pi]$, *on a*

$$\mathbb{E}[F_n^2(t)] = K_n * \mu_\rho(t), \qquad \mathbb{E}[F_n'(t)^2] = \frac{1}{\alpha_n} L_n * \mu_\rho(t)$$

et

$$\mathbb{E}[F_n(t)F_n'(t)] = \frac{1}{2} K_n' * \mu_\rho(t).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F_n^2(t)\right] &= \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}\left[a_k a_l\right] \cos(kt)\cos(lt) + \mathbb{E}\left[b_k b_l\right] \sin(kt)\sin(lt) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^{n} \rho(k-l)\cos((k-l)t) = \sum_{r=-n}^{n} \left(1 - \frac{|r|}{n}\right) \rho(r) e^{irt}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[F_n^2(t)] = K_n * \mu_\rho(t). \tag{1.2}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F_n'(t)^2] &= \frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^{n} kl\rho(k-l)\cos((k-l)t) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{2}{n}\sum_{\ell>k} k\ell\rho(k-\ell)\cos((k-\ell)t) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{n-k} k(r+k)\rho(r)\cos(rt) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\rho(r)\cos(rt)\left(\sum_{k=1}^{n-r} k(r+k)\right) \\
&= \sum_{r=-(n-1)}^{n-1} \rho(r)e^{irt}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-|r|} k(|r|+k)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[F_n'(t)^2] = \frac{1}{\alpha_n} L_n * \mu_\rho(t). \tag{1.3}$$

Enfin, en dérivant la première expression, on a

$$\mathbb{E}\left[F_n(t)F_n'(t)\right] = \frac{1}{2}K_n' * \mu_\rho(t). \tag{1.4}$$

□

En particulier, en injectant les expressions (1.2), (1.3) et (1.4) dans la formule de Kac–Rice et via le lemme d'Ylvisaker ($K_n * \mu_\rho > 0$ car μ_ρ est une mesure de probabilité et K_n est un noyau positif), on déduit le l'expression suivante du nombre moyen de zéros dans le cas gaussien dépendant.

Corollaire 1.2.1. *Soit $F_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ défini sur $[0, 2\pi]$, avec $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux processus gaussiens stationnaires indépendants centrés de fonction de corrélation ρ associée à la mesure spectrale μ_ρ. Le processus $F_n(t)$ est presque sûrement non-dégénéré sur sa période et pour tout intervalle $I \subseteq [0, 2\pi]$, on a alors*

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(F_n, I)] = \frac{1}{\pi}\int_I \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}\frac{L_n * \mu_\rho(t)}{K_n * \mu_\rho(t)} - \left(\frac{1}{2}\frac{K_n' * \mu_\rho(t)}{K_n * \mu_\rho(t)}\right)^2}\,dt.$$

Bien entendu, cette dernière expression est compatible avec celle obtenue dans le cas de coefficients i.i.d. puisque dans le cas indépendant, on a $\rho(k) = \delta_0(k)$ et la mesure spectrale μ_ρ n'est autre que la mesure de Lebesgue normalisée sur $[0, 2\pi]$ de sorte que l'intégrande est constante égale à $1/\alpha_n$. Dans le cas plus général de coefficients gaussiens dépendants, le Corollaire 1.2.1 montre que l'asymptotique du nombre moyen de zéros se réduit donc à l'étude de l'asymptotique des produits de convolution ci-dessus. Comme établi dans [ADP19], les noyaux K_n et L_n sont des approximations de l'unité.

Lemme 1.2.2 (Lemme 1. de [ADP19]). *Soit $n \geq 1$. Les noyaux positifs K_n et L_n sont des approximations de l'unité, i.e.*

$$\|K_n\|_{L^1([0,2\pi],dx/2\pi)} = \|L_n\|_{L^1([0,2\pi],dx/2\pi)} = 1,$$

et pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} K_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} L_n(x)dx = 0.$$

Considérons la décomposition classique de la mesure spectrale

$$\mu_\rho := \mu_\rho^s + \psi_\rho(x)dx,$$

où μ_ρ^s est la partie singulière et $\psi_\rho(x)dx$ est la partie à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, avec la convention que $\psi_\rho = 0$ si μ_ρ est purement singulière. Le comportement asymptotique des produits de convolution apparaissant dans la formule de Kac–Rice est alors décrit par des théorèmes de type "Fejér–Lebesgue". Nous montrerons ainsi dans le Lemme 4.2.2 ci-après que pour presque tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} K_n * \mu_\rho(x) = \psi_\rho(x), \quad \lim_{n\to+\infty} L_n * \mu_\rho(x) = \psi_\rho(x), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} K_n'(t) * \mu_\rho(x) = 0.$$

Ponctuellement, lorsque $\psi_\rho(x) > 0$, l'intégrande dans la formule de Kac–Rice admet donc l'equivalent asymptotique $1/\alpha_n$ lorsque n tend vers l'infini, comme dans le cas indépendant. Pour autant, le comportement asymptotique de l'intégrale globale n'est pas clair car il n'y a pas de domination *a priori*. Plus problématique encore est le cas où $\psi_\rho(x) = 0$ car alors la formule de Kac–Rice fait apparaître une limite indéterminée du type $0/0$. Ces difficultés sont précisément le point départ de l'article [APP21a] détaillé au Chapitre 4 de la seconde partie du manuscrit, où nous verrons que l'universalité de l'asymptotique nodale est de facto liée à l'annulation de la densité spectrale.

1.3 Estimés de discrépance

Le comptage du nombre moyen de zéros d'un polynôme trigonométrique aléatoire sur tout une période peut nécessiter en pratique de considérer des intervalles sur lesquels on se place loin de phénomènes d'annulation ou de singularités, de sorte que l'expression donnée par la formule de Kac–Rice est directement exploitable. Néanmoins, afin de conclure globalement, il faut alors tout de même évaluer la proportion de zéros sur des intervalles dont la taille est petite. Par exemple, imaginons une situation où l'intégrande dans la formule de Kac–Rice est singulière en zéro, on est alors amené à effectuer la décomposition

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])] = \mathbb{E}[\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi] \setminus [-\delta, \delta])] + \mathbb{E}[\mathcal{N}(F_n, [-\delta, \delta])],$$

pour $0 < \delta = \delta_n << 1$ assez petit. On aimerait alors avoir des bornes *a priori* permettant d'affirmer que le nombre de zéros dans le petit intervalle est négligeable par rapport à celui du reste de la période.

L'objet de cette section est précisément de présenter des estimées du nombre de zéros d'un polynôme aléatoire algébrique complexe sur une petite portion d'un anneau du plan complexe, dans le but d'en déduire un contrôle du nombre de zéros d'un polynôme trigonométrique aléatoire réel sur un intervalle de taille petite. Les résultats qui suivent sont issus de [PY15] et [Pir20]. Soient $n \geq 1$ un entier et P_n un polynôme algébrique aléatoire de degré n de la forme

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{k,n} z^k,$$

où les coefficients $(A_{k,n})$ sont des variables aléatoires complexes toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Comme plus haut, on désigne par $\mathbb{E}$ l'espérance sous la loi $\mathbb{P}$. On désigne par $Z(P_n) := \{Z_1, \ldots, Z_n\}$ l'ensemble des zéros complexes de P_n et l'on considère la mesure empirique associée

$$\tau_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{Z_k}.$$

C'est une mesure de Borel aléatoire sur $\mathbb{C}$. On désigne par ailleurs par μ la mesure uniforme sur le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Lorsque les coefficients $A_{k,n}$ sont i.i.d., il est remarquable que, $\mathbb{P}-$presque sûrement, la suite de mesure τ_n converge faiblement vers μ si et seulement si $\mathbb{E} \max(\log |A_0|, 0) < +\infty$, voir par exemple [IZ13]. En outre, l'équidistribution des zéros sur le cercle unité peut également se produire même lorsque la condition d'indépendance est relaxée, voir [Pri18].

Il est par ailleurs possible de quantifier la vitesse de convergence τ_n vers μ. Pour se faire, on définit le secteur angulaire

$$A_r(\alpha, \beta) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1/r, \ \alpha \leq \arg(z) < \beta\}, \ 0 < r < 1.$$

On a alors le premier résultat suivant.

Théorème 1.3.1 (Theorem 2.1 dans [PY15])**.** *On considère un polynôme algébrique aléatoire $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k$ dont les coefficients sont des variables aléatoires complexes satisfaisant :*

1. *Il existe un $t \in (0, 1]$ fixé tel que pour tout $k = 0, \ldots, n$,*
$$\mathbb{E}\left[|A_k|^t\right] < \infty,$$
2. *$\mathbb{E}[\log |A_0|] > -\infty$ et $\mathbb{E}[\log |A_n|] > -\infty$.*

Alors pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand,

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\tau_n(A_r(\alpha, \beta))}{n} - \frac{\beta - \alpha}{2\pi}\right|\right] \leq C_r \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t} \log \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[|A_k|^t\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\log |A_0 A_n|\right]\right)\right]^{1/2},$$

où

$$C_r := \sqrt{\frac{2\pi}{\boldsymbol{k}}} + \frac{2}{1 - r} \quad \textit{avec} \quad \boldsymbol{k} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

De la même façon, on montre le résultat analogue.

Corollaire 1.3.1 (Corollaire 2.2 dans [PY15]). *Soit $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{k,n} z^k$ une suite de polynômes aléatoires dont les coefficients sont tels que*

$$M := \sup_{k=0,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|A_{k,n}|^t\right] < \infty, \quad L := \inf_{k=0,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\log|A_{k,n}|\right] > -\infty.$$

Alors, lorsque n tend vers l'infini,

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\tau_n(A_r(\alpha,\beta))}{n} - \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\right|\right] \leq C_r \left[\frac{1}{n}\left(\frac{\log(n+1)+\log(M)}{t} - L\right)\right]^{1/2},$$

en particulier

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\tau_n(A_r(\alpha,\beta))}{n} - \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\right|\right] = O\left(\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\right).$$

Voyons maintenant comment déduire des résultats ci-dessus, qui s'appliquent aux zéros complexes de polynômes algébriques, une borne a priori sur le nombre de zéros réels de polynômes trigonométriques. Le lemme suivant sera utilisé à plusieurs reprises dans les chapitres 3 et 4 de la seconde partie du manuscrit.

Lemme 1.3.1 (Proposition 3.1.1 dans [Pir20]). *On considère une suite de polynômes trigonométriques aléatoires $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, dont les coefficients $(a_k)_k, (b_k)_k$ des variables gaussiennes $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ non nécessairement indépendantes. Soit $a \in (0,1/2)$ un réel fixé. Alors quand n tend vers l'infini,*

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(F_n,[0,n^{-a}])\right] = O(n^{1-a}).$$

Par ailleurs, la borne ci-dessus est valide dans tout intervalle de taille n^{-a}, i.e. pas uniquement au voisinage de zéro.

Démonstration. Remarquons que l'on peut écrire

$$F_n(x) = e^{-inx} P_{2n}(e^{ix})$$

où l'on a posé $P_{2n}(z) := \sum_{k=-n}^{n} c_k z^{k+n}$ avec $c_0 = a_0$ et $c_k = \widehat{c_{-k}} = (a_k - ib_k)/2$ pour $k = 1,\dots,n$. On a alors

$$\mathbb{E}\left[|2c_k|\right] = \mathbb{E}\left[|2c_{-k}|\right] \leq \mathbb{E}\left[|a_k|\right] + \mathbb{E}\left[|b_k|\right], \quad \mathbb{E}[\log|2c_n|] \geq \mathbb{E}\left[\log\max\{|a_n|,|b_n|\}\right]$$

ce qui implique que $M < \infty$ et $L > -\infty$ avec les notations précédentes. Soit maintenant $\tau_{2n} := \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \delta_{z_k}$ la mesure de comptage des zéros $\{z_k\}_{k=0,\dots,2n}$ de P_{2n}. Pour $r \in (0,1)$, on pose $A_{1/2}(0,n^{-a}) := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 1/r, 0 < \arg(z) < n^{-a}\}$. On déduit alors du Corollaire 1.3.1 ci-dessus que lorsque n tend vers l'infini

$$\mathbb{E}\left[\left|\tau_{2n}(A_{1/2}(0,n^{-a}) - \frac{n^{-a}}{2\pi}\right|\right] = O\left(\sqrt{\frac{\log(2n)}{2n}}\right).$$

Par suite, lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,(0,n^{-a}))\right] \leq \mathbb{E}\left[\tau_{2n}(A_{1/2}(0,n^{-a})\right] = O(\sqrt{\log(n)/n}) + O(n^{1-a}) = O(n^{1-a}).$$

$\square$

1.4 Continuité du nombre de zéros pour la topologie $\mathcal{C}^1$

Comme indiqué dès l'introduction de ce manuscrit, l'objet central de notre étude est le nombre de zéros de fonctions trigonométriques aléatoires. Un outil qui s'avérera crucial dans nos investigations est la continuité de l'application "nombre de zéros"

$$\mathcal{N} : f \mapsto \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]).$$

Bien entendu, pour parler de continuité, il faut préciser la topologie ambiante et il est clair que la topologie uniforme sur les fonctions continues n'est pas suffisante pour assurer la continuité de l'application de comptage. En effet, si $f_n(t) = \frac{1}{n}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, on a bien $\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,2\pi]} |f_n(t)| = 0$ mais naturellement

$$0 = \mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) \not\to \mathcal{N}(\lim_n f_n, [0, 2\pi]) = \infty.$$

Nous allons en fait requérir un peu plus de régularité en travaillant avec la topologie $\mathcal{C}^1$. Soit donc l'espace $E = \mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni de la topologie $\mathcal{C}^1$ associée à la famille de semi-normes $\|\cdot\|$ définies par

$$\|f\| := \sup_{[0,2\pi]} \left(|f| + |f'|\right).$$

On rappelle que, selon la Définition 1.1.1 ci-dessus, on dit qu'une fonction f est non-dégénérée sur $[0, 2\pi]$ si f' et f ne s'annulent pas simultanément sur l'intervalle. On a alors le théorème suivant, qui établit que $\mathcal{N}$ est continue sur l'ensemble des fonctions non-dégénérées. Ce théorème sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite, en particulier de façon cruciale dans les chapitres 4 et 5, où nous montrerons que correctement renormalisées, les fonctions trigonométriques aléatoires considérées admettent des limites d'échelle et par suite que le nombre de zéros de ces fonctions converge vers le nombre de zéros des fonctions limite. La preuve donnée ci-dessous est issue de [AP20b], elle-même inspirée de celle de [RS01].

Théorème 1.4.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ et qui converge pour la topologie $\mathcal{C}^1([a, b])$ vers une fonction $f \in \mathcal{C}^1$, i.e.*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_\infty(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x) - f_\infty'(x)| \right) = 0.$$

Si l'on suppose de plus que f_∞ est non-dégénérée au sens suivant :

$$f_\infty(a)f_\infty(b) \neq 0 \quad \textit{et} \quad \omega(f_\infty) := \inf_{x\in[a,b]} |f_\infty(x)| + |f_\infty'(x)| > 0,$$

alors $\mathcal{N}(f_\infty, [a, b]) < +\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{N}(f_n, [a, b]) = \mathcal{N}(f_\infty, [a, b]).$$

Démonstration. La condition $\omega(f_\infty) > 0$ implique qu'il n'y a pas de point d'accumulation des zéros de f_∞ et donc $\mathcal{N}(f_\infty, [a,b]) < \infty$. Pour tout $\alpha < \min\left(\frac{\omega(f_\infty)}{2}, |f(a)|, |f(b)|\right)$, l'ouvert $f_\infty^{-1}((-\alpha,\alpha))$ est une union finie d'intervalles ouverts chacun contenant exactement un zéro de f_∞. Si $r = \mathcal{N}(f_\infty, [a,b])$,

$$f_\infty^{-1}((-\alpha,\alpha)) = \bigcup_{i=1}^{r} (x_i, y_i),$$

avec $f_\infty(x_i) f_\infty(y_i) < 0$. Sur chacun de ces intervalles, $|f'_\infty| > \frac{\omega(f_\infty)}{2} > 0$, ce qui implique $f'_\infty > \frac{\omega(f_\infty)}{2}$ ou bien $f'_\infty < -\frac{\omega(f_\infty)}{2}$. Ainsi pour n suffisamment grand, on peut supposer que

1. pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $f'_n > \frac{\omega(f_\infty)}{3}$ ou $f'_n < -\frac{\omega(f_\infty)}{3}$ sur (x_i, y_i),
2. pour tout $i = 1, \ldots, r$, $f_n(x_i) f_n(y_i) < 0$,
3. $|f_n| > 0$ sur $f_\infty^{-1}((-\alpha,\alpha))^c$.

Ces trois propriétés et la continuité de f_n implique que $\mathcal{N}(f_n, [a,b]) = r = \mathcal{N}(f_\infty, [a,b])$. □

Dans la suite, nous voudrons naturellement appliquer le théorème de convergence précédent à des fonctions aléatoires / processus stochastiques. Il convient donc de préciser des critères de convergence en loi sur l'espace E. Le critère suivant est issue de [RS01].

Théorème 1.4.2. *Une suite de processus $(g_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans E converge en loi vers g_∞ pour la topologie $\mathcal{C}^1$ si et seulement si pour $\ell \in \{0,1\}$, les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *pour tout $p \geq 1$ et tout $t_1, \ldots, t_p \in [0, 2\pi]$, on a convergence des lois fini-dimensionnelles*

$$(g_n^{(\ell)}(t_1), \ldots, g_n^{(\ell)}(t_p)) \Rightarrow (g_\infty^{(\ell)}(t_1), \ldots, g_\infty^{(\ell)}(t_p)),$$

2. *il existe $a, b, C > 0$ tels que pour tout $s, t \in [0, 2\pi]$,*

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|g_n^{(\ell)}(t) - g_n^{(\ell)}(s)|^a \leq C|t-s|^{1+b}. \tag{1.5}$$

En combinant le théorème de continuité ci-dessus avec le *continuous mapping theorem* sur l'espace métrique $(E, \|\cdot\|)$, on obtient alors le corollaire suivant qui sera fréquemment utilisé dans la suite.

Corollaire 1.4.1. *Soit $X_n(\cdot)$ une suite de processus stochastiques à valeurs dans E et convergeant en loi vers un processus $X_\infty(\cdot)$, que l'on suppose non-dégénérée presque-sûrement. Alors lorsque n tend vers l'infini et pour tout intervalle $[a,b] \subseteq [0, 2\pi]$, on a la convergence en loi suivante*

$$\mathcal{N}(X_n(\cdot), [a,b]) \Rightarrow \mathcal{N}(X_\infty(\cdot), [a,b]).$$

1.5 Théorème limite central à la Salem–Zygmund

Pour conclure ce chapitre, on expose enfin une méthode introduite dans [AP19] qui s'avère particulièrement efficace pour étudier le nombre de zéros de fonctions trigonométriques aléatoires, que ce soit en moyenne et même presque sûrement. Cette méthode repose sur le théorème limite central presque sûr obtenu par Salem et Zygmund dans [SZ54] et elle est motivée par le lemme déterministe suivant, permettant une représentation stochastique bien utile du nombre de zéros. La preuve ci-dessous est directement issue de [AP19].

Lemme 1.5.1 (Lemme 3 de [AP19])**.** *Si f est une fonction 2π-périodique possédant un nombre fini de zéros, alors pour tout $0 < h < 2\pi$, on a*

$$\frac{h}{2\pi} \times \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]) = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(f, [X, X + h])\right],$$

où X est une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et où $\mathbb{E}_X$ désigne l'espérance associée.

Démonstration. On désigne par $\{x_1, \ldots, x_N\}$ l'ensemble des zéros de f par μ_f la mesure empirique associée donnée par

$$\mu_f := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta_{x_k}.$$

Ainsi on peut écrire que si $a < b$ avec $b - a \leq 2\pi$,

$$\mathcal{N}(f, [a, b]) = N \times \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[a,b] \mod 2\pi}(t)\mu_f(dt).$$

Comme X est uniforme sur $[0, 2\pi]$, le théorème de Fubini permet de permuter les intégrales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(f, [X, X + h])\right] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{N}(f, [x, x + h])dx \\
&= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[x,x+h] \mod 2\pi}(t)dx \right) \mu_f(dt) \\
&= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[t-h,t] \mod 2\pi}(x)dx \right) \mu_f(dt) \\
&= \frac{N}{2\pi} \times h \times \int_0^{2\pi} \mu_f(dt) = \frac{N}{2\pi} \times h.
\end{aligned}$$

□

Sur l'espace de probabilité produit $(\Omega \times [0, 2\pi], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, 2\pi]), \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X)$, autrement dit, en supposant que la variable uniforme X est indépendante des coefficients (a_k) et (b_k), on peut naturellement choisir pour fonction f dans le lemme ci-dessus notre polynôme trigonométrique aléatoire préféré, à savoir

$$F_n(t) := \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pour $h = 2\pi/n$, il vient alors

$$\frac{\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N} \left(F_n, \left[X, X + \frac{2\pi}{n} \right] \right) \right].$$

Si l'on introduit le processus $(g_n(t))_{t \in [0,2\pi]}$ défini par

$$g_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} F_n \left(X + \frac{t}{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k(X + t/n)) + b_k \sin(k(X + t/n)),$$

la dernière formule s'écrit encore

$$\frac{\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N} \left(g_n, [0, 2\pi] \right) \right]. \tag{1.6}$$

C'est à ce moment qu'entre en jeu le théorème limite central presque sûr de Salem et Zygmund. En effet, avec les notations précédentes, le théorème s'énonce comme suit.

Théorème 1.5.1 (Salem–Zygmund, 1954)**.** *Supposons que les coefficients a_k et b_k sont tous indépendants et de même loi et possèdent un moment d'ordre 3. Alors $\mathbb{P}$-presque-sûrement, lorsque n tend vers l'infini, on la convergence en loi suivante sous $\mathbb{P}_X$*

$$g_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kX) + b_k \sin(kX) \xrightarrow{\mathcal{L}_{\mathbb{P}_X}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Dans l'énoncé ci-dessus, il est remarquable de noter que les coefficients a_k, b_k sont ici gelés, le seul aléa entrant en jeu étant la variable aléatoire X de loi uniforme i.e. le point d'évaluation du polynôme. Par ailleurs, ce théorème se généralise en un TLC fonctionnel, avec une convergence en loi pour la topologie $\mathcal{C}^1$, comme introduite dans la Section 1.4 précédente.

Théorème 1.5.2 (Angst, Poly, 2019 [AP19])**.** *Soit (a_k, b_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées de variance unitaire et possèdent un moment d'ordre 3. Alors $\mathbb{P}$-p.s., quand n tend vers l'infini, le processus $(g_n(t))_{t \in [0,2\pi]}$ converge en loi pour la topologie $\mathcal{C}^1$ vers un processus gaussien stationnaire $(g_\infty(t))_{t \in [0,2\pi]}$ de fonction de covariance*

$$\mathbb{E}_X[g_\infty(t) g_\infty(s)] = \operatorname{sin}_c(t - s).$$

D'après le lemme de Ylvisaker, le processus limite g_∞ est presque sûrement non-dégénéré et par le Corollaire 1.4.1 ci-dessus, $\mathbb{P}$ presque sûrement, on obtient la convergence en loi suivante sous $\mathbb{P}_X$

$$\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \xrightarrow{\mathcal{L}_{\mathbb{P}_X}} \mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]).$$

Pour pouvoir conclure à la convergence $\mathbb{P}$ presque sûre (resp. sous l'espérance $\mathbb{E}$) dans l'équation (1.6) ci-dessus, il suffit alors d'établir une condition d'équi-intégrablité sous $\mathbb{P}_X$ (resp. sous $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X$) pour la famille de variables aléatoires $(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]))_{n\geq 1}$. Dans [AP19], sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, les auteurs montrent par exemple qu'il existe $\eta \in (0, 1)$ tel que

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_X \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta}\right] < +\infty, \quad \sup_{n\geq 1} \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}_X \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta}\right] < +\infty.$$

Par suite (voir le Lemme 1.5.2 ci-après), ils déduisent ainsi les convergence $\mathbb{P}$-presque sûre et (donc ici) en moyenne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])\right] = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(F_n, [0, 2\pi])\right]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Cette méthode s'avère donc particulièrement efficace pour obtenir des asymptotiques nodales presque sûre et en moyenne. Par ailleurs, comme nous le verrons dans les chapitres 4 et 5 de la seconde du manuscrit, la méthode se généralise facilement au cas de polynômes avec des coefficients dépendants, ainsi qu'aux fonctions trigonométriques aléatoires non-analytiques.

Lemme 1.5.2. *Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ possédant un moment d'ordre 1. Si X_n converge en loi vers une variable X ayant un moment d'ordre 1 et que*

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^{1+\eta}] < +\infty,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[|X|].$$

Chapitre 2

Synthèse des contributions et méthodes utilisées

Dans ce chapitre, nous présentons de façon synthétique les contributions principales de cette thèse. Ces contributions seront ensuite détaillées dans la deuxième partie du manuscrit, qui reprend les articles soumis dans le cadre de la thèse. Comme mentionné dans le préambule, en vue d'une meilleure compréhension du phénomène d'universalité, dans le cas de polynômes trigonométriques aléatoires on cherche à examiner comment la dépendance des coefficients affecte l'asymptotique du nombre de zéros et dans le cas de signaux périodiques généraux à mettre en évidence le rôle de la fonction de base et en particulier de sa régularité.

2.1 Cas d'une mesure spectrale discrète

Comme rappelé dans l'introduction, dans le cas de modèles de polynômes trigonométriques aléatoires, aussi bien à coefficients indépendants et identiquement distribués comme dans [Fla17] ou avec des coefficients gaussiens dépendants vérifiant les hypothèses de [ADP19], l'asymptotique du nombre moyen de zéros est universelle

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Il faut en fait considérer des modèles de polynômes trigonométriques aléatoires assez exotiques pour obtenir des asymptotiques non-universelles, voir par exemple les références [FL12, Pir20, Pir21] qui considèrent des polynômes aléatoires avec des coefficients "constants par blocs" ou encore palindromiques.

Dans le cas de coefficients gaussiens dépendants traité dans [ADP19], une hypothèse cruciale est le fait que la mesure spectrale associée au modèle admet une densité spectrale minorée, i.e. $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ avec $\inf_{[0,2\pi]} \psi_\rho > 0$. Cette hypothèse est par exemple vérifiée pour les incréments d'un mouvement brownien fractionnaire pour tout indice de Hurst. Elle n'empêche donc pas des corrélations à longue portée, cependant elle exclue bien sûr les mesures spectrales discrètes, pourtant naturelles.

Ce constat est le point de départ de l'article [Pau20] détaillé au Chapitre 3 ci-après, où nous considérons précisément le cas de coefficients gaussiens dépendants associés à une mesure spectrale discrète. Nous montrons que dans ce cas, de façon assez surprenante, lorsque normalisé par le degré, le nombre moyen de zéros ne converge pas et admet en fait tout un continuum de limites possibles. En particulier, dans le cas d'une mesure spectrale discrète, l'asymptotique du nombre moyen de zéros n'est donc pas universelle.

2.1.1 Le modèle

On s'intéresse à des polynômes trigonométriques aléatoires de la forme

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in [0, 2\pi]$$

avec $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux processus indépendants, gaussiens stationnaires centrés de variance unitaire, associés à une fonction de corrélation ρ, i.e. $\forall k, \ell \geq 1$

$$\mathbb{E}[a_k b_\ell] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[a_k a_\ell] = \mathbb{E}[b_k b_\ell] =: \rho(|k-\ell|).$$

Pour simplifier l'étude, on choisit ici une fonction de corrélation bien **particulière**

$$\rho(k) = \cos(k\alpha),$$

avec $\alpha > 0$, de sorte que la mesure spectrale associée est la mesure discrète de Bernoulli

$$\mu_\rho = \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}\right).$$

D'après le Corollaire 1.2.1 du chapitre précédent, le nombre moyen de zéros sur une période est alors donné via la formule de Kac–Rice par

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{I_n(t)} dt, \tag{2.1}$$

où l'intégrande est ici donnée par

$$I_n(t) = \frac{1}{\alpha_n} \frac{L_n(t+\alpha) + L_n(t-\alpha)}{K_n(t+\alpha) + K_n(t-\alpha)} - \frac{1}{4}\left(\frac{K_n'(t+\alpha) + K_n'(t-\alpha)}{K_n(t+\alpha) + K_n(t-\alpha)}\right)^2. \tag{2.2}$$

Il s'agit alors de comprendre l'asymptotique des quotients ci-dessus, lorsque n tend vers l'infini. Comme les noyaux trigonométriques K_n et L_n se concentrent au voisinage de zéro lorsque n tend vers l'infini, l'intégrande $I_n(t)$ fait apparaître des quotients du type $0/0$ ou ∞/∞ selon la proximité de t avec $\pm\alpha$. Il s'agit donc d'étudier finement le comportement asymptotique des numérateurs et dénominateurs. Il s'avère que celui-ci dépend fortement de la distance de $n\alpha$ à $\pi\mathbb{Z}$ et donc des propriétés arithmétiques de α.

2.1.2 Les résultats principaux

Le résultat principal de l'article [Pau20] est le théorème suivant.

Théorème 2.1.1 (Théorème 3.1.1 ci-après)**.** *Il existe une fonction continue explicite ℓ_α sur $[0,2\pi]$ à valeurs dans un intervalle $J_\alpha \subset]\sqrt{2},2]$ telle que pour tout $0<\beta<1$ et pour tout n assez grand tel que $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$*

$$\left|\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} - \ell^a(n\alpha \bmod \pi)\right| = O\left(\frac{1}{n^\beta(1-|\cos(n\alpha)|)^2}\right) + o(1).$$

La fonction ℓ_α est donnée par

$$\ell^\alpha(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{[0,2\pi]^2}\sqrt{1+|g_x^\alpha(s,u)|^2}dsdu,$$

où

$$g_x^\alpha(s,u) := \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}.$$

À titre d'exemple, voici ci-dessous l'allure de la fonction ℓ^α pour $\alpha = 1/2$.

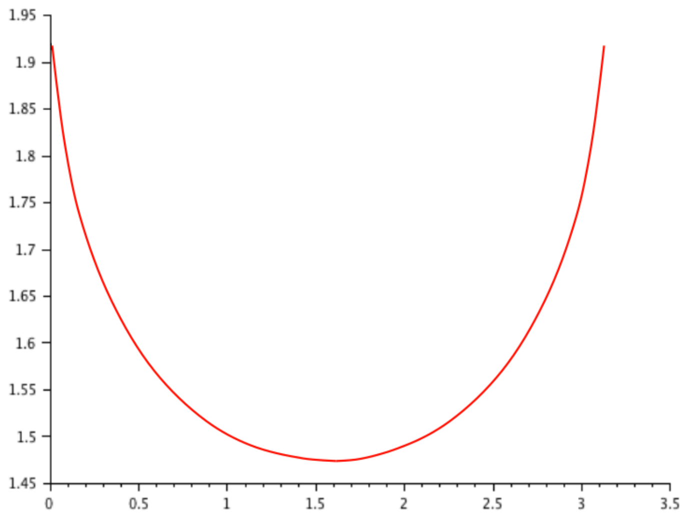

FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $x \mapsto \ell^{1/2}(x)$

En particulier si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, la suite $(n\alpha \bmod \pi)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans un ensemble fini S et du théorème ci-dessus, on déduit que la suite $\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n}$ a également une orbite finie.

Corollaire 2.1.1 (Corollaire 3.1.1 ci-après)**.** *Si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, alors pour tout $x \in S\backslash\{0\}$*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} - \ell^\alpha(x)\right|\mathbb{1}_{n\alpha = x \bmod \pi} = 0.$$

Plus remarquable encore, lorsque $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, la suite $n\alpha$ est dense modulo π et le nombre moyen de zéros admet donc tout un continuum de limites possibles.

Corollaire 2.1.2 (Corollaire 3.1.3 ci-après)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\ell \in (\sqrt{2}, 2]$, il existe $\alpha = \alpha(\ell) \geq 0$ assez petit et une infinité d'entiers n tels que*

$$\left| \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

si les coefficients $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ de f_n admettent la mesure spectrale $\frac{\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}}{2}$.

Ces derniers résultats montrent donc que dans le cas d'une mesure spectrale discrète, il n'y a en général pas convergence du nombre moyen de zéros normalisé et donc a fortiori que l'asymptotique nodale n'est pas universelle.

2.1.3 Présentation de la méthode et des obstacles

Le point de départ des preuves des résultats principaux énoncés ci-dessus est naturellement l'expression du nombre moyen de zéros donnée par la formule de Kac–Rice et les équations (2.1) et (2.1). Comme mentionné plus haut, le comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini de l'intégrande $I_n(t)$ dans la formule de Kac–Rice dépend de la proximité de t des atomes $\pm\alpha$. La preuve du Théorème principal 3.1.1 peut-être synthétisée de la façon suivante.

1. On montre tout d'abord que la contribution du nombre moyen de zéros près des atomes $\pm\alpha$ est négligeable. Pour cela, on introduit les ensembles

$$J_\varepsilon := \left\{ t \in [0, 2\pi], \left| \sin\left(\frac{t-\alpha}{2}\right) \right| > \varepsilon, \left| \sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right) \right| > \varepsilon \right\}.$$

   On utilise alors les résultats de discrépance rappelés à la Section 1.3 du chapitre précédent pour établir que si $\varepsilon = \varepsilon_n$ est de la forme $\varepsilon_n = n^{-\beta}$ alors

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n, J^c_{\varepsilon_n}\right)\right]}{n} = O\left(\varepsilon_n\right).$$

   Autrement dit, on peut restreindre l'étude à ce qu'il se passe "loin" des atomes.

2. Uniformément sur l'ensemble J_ε, une analyse fine de l'intégrande montre que

$$I_n(t) = \frac{n^2}{4}\left(Q_n(t) + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^5 (1 - |\cos(n\alpha)|)} \right) \right),$$

   où

$$Q_n(t) := 1 + \left(\frac{\sin(n\alpha)\sin\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}{\left(\sin^2\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\right)} \right)^2.$$

   En particulier, on a

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n, J_\varepsilon\right)\right]}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^5 (1 - |\cos(n\alpha)|)} \right).$$

3. On effectue alors un changement de variable $t \to t/n$ dans la dernière intégrale puis un découpage en sous intervalles de taille $2\pi/n$.

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{2\pi} \sqrt{Q_n\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{u}{n}\right)}\mathbb{1}_{\frac{2\pi k+u}{n}\in J_\varepsilon}du.$$

   Ce faisant, on fait apparaître une moyenne de Cesaró, que l'on peut aussi interpréter comme une somme de Riemann.

4. La partie la plus technique et la plus difficile de la preuve consiste alors à montrer que cette somme de Riemann converge lorsque n tend vers l'infini vers une intégrale de Riemann. Si l'on introduit la fonction à deux variables

$$g_x^\alpha(s,u) := \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)},$$

   on a en effet $Q_n(t) = 1 + |g_{n\alpha}^\alpha(t,nt)|^2$ et une analyse quantifiée en fonction de n et ε permet de montrer que

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt \approx \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^\alpha(s,u)|^2}\mathbb{1}_{s\in J_\varepsilon}dsdu.$$

   On note au passage que dans le membre de droite, on a maintenant une intégrale double : la première intégrale est celle de la formule de Kac–Rice, la seconde résulte de la convergence de la somme de Riemann vers une intégrale continue.

5. La fonction ℓ^α de l'énoncé du théorème principal n'est autre que

$$\ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_x^\alpha(s,u)|^2}dsdu,$$

   de sorte qu'en choisissant $\varepsilon_n = n^{-\beta}$, l'on obtient bien in fine (une version quantifiée) de l'asymptotique

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n,[0,2\pi]\right)\right]}{n} \approx \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n,J_{\varepsilon_n}\right)\right]}{n} \approx \ell^a(n\alpha \bmod \pi).$$

   Les propriétés de la fonction $x \mapsto \ell^\alpha(x)$ découlent de celle de l'intégrande g_x^α.

2.2 Cas d'une mesure spectrale générale

Cette section présente de façon synthétique les contributions relatives à l'article [APP21a], contributions qui seront ensuite détaillées au Chapitre 4 ci-après. Comme dans le premier article [Pau20], l'objet d'étude est toujours le nombre moyen de zéros de polynômes trigonométriques aléatoires f_n, dont les coefficients sont donnés par des processus gaussiens stationnaires, avec une fonction de corrélation ρ et une mesure spectrale associée μ_ρ, i.e.

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt), \quad t \in [0,2\pi],$$

avec $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ deux processus indépendants, gaussiens stationnaires centrés de variance unitaire, associés à une fonction de corrélation ρ, i.e. $\forall k, \ell \geq 1$

$$\mathbb{E}[a_k b_\ell] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[a_k a_\ell] = \mathbb{E}[b_k b_\ell] =: \rho(|k-\ell|), \quad \rho(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi k} \mu_\rho(d\xi).$$

Comme nous l'avons vu au Chapitre 1, dans le cadre ci-dessus, la formule de Kac–Rice (Corollaire 1.2.1) permet d'exprimer le nombre moyen de zéros via des convolutions de noyaux trigonométriques avec la mesure spectrale.

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\alpha_n} \frac{L_n * \mu_\rho(t)}{K_n * \mu_\rho(t)} - \left(\frac{1}{2} \frac{K_n' * \mu_\rho(t)}{K_n * \mu_\rho(t)}\right)^2}\, dt.$$

Par ailleurs, comme évoqué à la fin de la Section 1.2 ci-dessus, d'après le théorème de Fejér–Lebesgue, lorsque n tend vers l'infini, on a ponctuellement pour presque tout t

$$\lim_{n\to+\infty} K_n * \mu_\rho(t) = \psi_\rho(t), \quad \lim_{n\to+\infty} L_n * \mu_\rho(x) = \psi_\rho(t), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} K_n'(t) * \mu_\rho(t) = 0.$$

Au vu des travaux précédents, la situation est la suivante :

— D'après [ADP19], si la mesure spectrale μ_ρ associée au modèle admet une densité spectrale minorée, i.e. $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ avec $\inf_{[0,2\pi]} \psi_\rho > 0$, alors l'asymptotique du nombre moyen de zéros est universelle, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

— D'après [Pau20] et comme décrit dans la section précédente, si la mesure spectrale est purement discrète, il n'y a en général pas convergence du nombre moyen de zéros normalisé par le degré, il y a même tout un continuum de limites possibles, à savoir l'intervalle $]\sqrt{2}, 2] \not\ni 2/\sqrt{3}$.

— D'après les travaux récents de [AP19], dans le cas de coefficients indépendants et identiquement distribués admettant un moment d'ordre 4, l'asymptotique nodale peut-être renforcée en une convergence presque sûre, au sens où $\mathbb{P}$ presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Plusieurs questions naturelles se posent alors :

— Que peut-on dire lorsque la mesure spectrale μ_ρ est une mesure à densité i.e. $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ mais que la densité ψ_ρ n'est pas minorée ?

— Que se passe-t-il si la densité ψ_ρ s'annule sur un ensemble de mesure de Lebesgue positive ? L'asymptotique nodale est-elle encore universelle ?

— Peut-on dire quelque chose lorsque μ_ρ admet à la fois une composante à densité et une composante singulière $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx + \mu_\rho^s$?

— Est-il possible d'obtenir des asymptotiques presque sûres similaire à celle de [AP19] dans le cas de coefficients dépendants ?

L'objet de l'article [APP21a] est précisément d'apporter des réponses - partielles ou complètes - à ces questions. Nous montrons en particulier que, de façon assez surprenante *a priori*, l'universalité de l'asymptotique du nombre moyen de zéros n'est pas reliée à la vitesse de décorrélation des coefficients, mais à l'annulation de la composante à densité ψ_ρ de la mesure spectrale. Ci-dessous, nous énonçons nos résultats principaux et précisons les méthodes utilisées en pointant les innovations et les difficultés rencontrées.

2.2.1 Une minoration générale

Commençons par un résultat simple mais néanmoins intéressant et qui corrobore une conjecture formulée par Pirhadi dans [Pir20] selon laquelle, dans le cas polynômes trigonométriques aléatoires dont les coefficients forment un processus gaussien stationnaire, l'asymptotique universelle $2/\sqrt{3}$ est la valeur limite minimale. Nous montrons que c'est effectivement bien le cas, du moins si l'on suppose que la mesure spectrale μ_ρ admet une composante à densité strictement positive presque partout sur la période.

Théorème 2.2.1 (Corollaire 4.2.1 ci-après)**.** *On suppose que $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx + \mu_\rho^s$ avec $\psi_\rho(x) > 0$ pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$. Alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

La preuve de ce résultat associe la formule de Kac–Rice, le lemme de Fejér–Lebesgue et le lemme de Fatou. Il est à mettre en regard avec les résultats de [Pau20] dans le cas d'une mesure spectrale purement discrète où les valeurs d'adhérence sont dans l'intervalle $]\sqrt{2}, 2]$. Comme on a bien sûr $2/\sqrt{3} < \sqrt{2}$, l'asymptotique universelle semble effectivement être la valeur minimale.

2.2.2 Lorsque la densité spectrale peut s'annuler

Décrivons maintenant la première contribution principale de [APP21a], qui permet de comprendre le lien entre l'asymptotique du nombre moyen de zéros et l'annulation éventuelle de la densité spectrale ψ_ρ. **Pour simplifier**, on se place ici l'hypothèse que la mesure spectrale n'admet pas de partie singulière, i.e.

$$\mu_\rho = \psi_\rho(x)dx.$$

Nous montrons que dès que la densité spectrale s'annule sur un ensemble de mesure de Lebesgue λ positive, l'asymptotique du nombre moyen de zéros n'est plus universelle, la limite est précisément une fonction affine de la mesure de l'ensemble des zéros de la densité spectrale.

Théorème 2.2.2 (Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 ci-dessous)**.** *On suppose que la densité spectrale vérifie une des hypothèses suivantes*

1. *$\psi_\rho \in \mathcal{C}^1$ avec une dérivée höldérienne sur un ouvert de mesure pleine,*

2. *ψ_ρ est continue par morceaux et son ensemble de zéros se décrit comme une union finie d'intervalles et de points.*

Alors, lorsque n tend vers l'infini

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} = \frac{\lambda(\{\psi_\rho=0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2\pi-\lambda(\{\psi_\rho=0\})}{\pi\sqrt{3}}.$$

Ce résultat appelle un certain nombre de remarques.

— Tout d'abord, il fournit toute une classe de modèles trigonométriques naturels pour lesquels l'asymptotique du nombre moyen de zéros n'est pas universelle.

— Il est remarquable que la limite ne dépende de la densité ψ_ρ que par la mesure de Lebesgue de l'ensemble de ses zéros. Il est par exemple facile d'imaginer deux mesures ayant des supports disjoints, des "allures" bien distinctes, et pourtant des ensembles nodaux de même mesure de Lebesgue, de sorte que les asymptotiques des nombres moyens de zéros associées sont les mêmes.

— En choisissant une densité spectrale lisse à support compact strictement inclus dans $]-\pi,\pi[$, on obtient une fonction de corrélation ρ qui tend arbitrairement vite vers zéro, mais pourtant l'asymptotique nodale n'est pas universelle. À l'opposé, comme remarqué dans [ADP19], il existe des fonctions de corrélations qui tendent arbitrairement vite vers zéro et telles que, pour autant, l'asymptotique nodale est universelle. Autrement dit, l'universalité de l'asymptotique nodale n'a ici rien à voir avec la vitesse de décorrélation du modèle.

— En faisant varier la densité spectrale, on obtient comme précédemment - mais pour des raisons distinctes - tout un continuum de limites possibles, cette fois l'intervalle $[2/\sqrt{3},\sqrt{2}[$.

Nous donnons maintenant une heuristique et les étapes principales de la preuve du Théorème 2.2.2 dans le cas simple mais représentatif où la densité ψ_ρ est de la forme $\psi_\rho(x) = 1/2a \times \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ avec $0 < a < \pi$. On rappelle qu'alors, via la formule de Kac–Rice, le nombre moyen de zéros est donné par

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{I_n(t)}dt,$$

avec

$$I_n(t) = \frac{1}{n^2\alpha_n}\frac{L_n * \psi_\rho(t)}{K_n * \psi_\rho(t)} - \left(\frac{1}{2n}\frac{K_n' * \psi_\rho(t)}{K_n * \psi_\rho(t)}\right)^2.$$

1. On fixe $\varepsilon > 0$ petit. Pour t dans l'intervalle $[-a+\varepsilon, a-\varepsilon]$, la fonction ψ_ρ est minorée – en fait égale à $1/2a > 0$ – aussi la méthode de [ADP19] s'applique et on peut montrer qu'uniformément, l'intégrande converge vers la limite universelle, i.e. pour $t \in [-a+\varepsilon, a-\varepsilon]$

$$\lim_{t\to+\infty} I_n(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Sur le complémentaire de $[-a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, la densité spectrale est identiquement nulle. Aussi, d'après le lemme de Fejér–Lebesgue, l'intégrande dans la formule de Kac–Rice fait apparaître des limites indéterminées du type 0/0. Il s'agit alors de pousser de développement asymptotique un cran plus loin dans la preuve classique du théorème de Fejér–Lebesgue, en étudiant finement les noyaux K_n et L_n. Ce faisant, on obtient le comportement asymptotique suivant, pour tout t dans $[-a-\varepsilon, a+\varepsilon]$
$$\lim_{t\to+\infty} I_n(t) = \sqrt{2}.$$
3. On traite enfin les voisinages de taille ε de $\pm a$ via les estimés de discrépance rappelés dans la Section 1.3 du premier chapitre. Au final, par additivité dans la formule de Kac–Rice, on obtient bien
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} = \frac{2a}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2\pi-2a}{\pi\sqrt{3}}.$$

En utilisant à nouveau les estimés de discrépance, il n'est pas trop difficile de passer du cas d'une densité spectrale de la forme d'une indicatrice comme ci-dessus à une densité spectrale plus générale qui s'annule sur un ensemble fini de points et d'intervalle (cas 2 dans l'énoncé ci-dessus). Enfin, si l'on souhaite se passer d'hypothèses sur la nature de l'ensemble des zéros de la densité spectrale ψ_ρ, il faut un peu plus de travail et on doit imposer un peu de régularité à cette dernière (cas 1 dans l'énoncé ci-dessus). En effet, si l'on suppose que la densité spectrale est dérivable avec dérivée hölderienne, il est alors possible d'expliciter une vitesse de convergence polynomiale dans le théorème de Fejér–Lebesgue, qui en retour permet de montrer que l'intégrande dans la formule de Kac–Rice est uniformément majorée. On conclut alors par convergence dominée. Il semble raisonnable de penser que le résultat reste vrai si la densité spectrale est "'seulement" de classe $\mathcal{C}^1$, mais nous ne sommes malheureusement pas parvenu à montrer que c'est effectivement le cas (c'est précisément le cas critique pour établir une vitesse dans le théorème de Fejér–Lebesgue).

2.2.3 Universalité et asymptotique presque sûre

Nous décrivons à présent la seconde contribution principale de [APP21a], qui permet de mieux cerner quelles hypothèses minimales il faut imposer à la densité spectrale pour obtenir une asymptotique universelle. Nous avons vu que le Théorème 2.2.2 ci-dessus permet se passer de l'hypothèse de minoration adoptée dans [ADP19] : la densité spectrale peut par exemple s'annuler sur un ensemble fini de points et l'asymptotique nodale reste en effet universelle. Le théorème suivant permet d'aller plus loin en établissant que la seule log-intégrabilité de la densité spectrale est une condition suffisante.

Théorème 2.2.3 (Théorème 4.1.3 ci-dessous)**.** *On suppose que* $\mu_\rho(dx) = \mu_\rho^s + \psi_\rho(x)dx$ *et qu'il existe* $\eta \in (0,1)$ *tel que*
$$\log(\psi_\rho) \in L^{1+\eta}([0,2\pi]),$$

alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

La condition de log-intégrabilité de la densité spectrale est naturelle dans ce contexte gaussien dépendant. On peut par exemple noter que le cas critique $\eta = 0$ correspond à une situation où la suite des coefficients aléatoires du polynôme est dite purement "non déterministe", c'est-à-dire qu'elle admet une représentation causale. Le Théorème 2.2.3 ci-dessus englobe naturellement le résultat principal de [ADP19] puisque si la densité spectrale est minorée par une constante positive, elle est naturellement log intégrable au voisinage de zéro.

Si l'on impose un peu plus d'intégrabilité et de régularité à la densité spectrale, il est en fait possible de renforcer l'asymptotique en moyenne précédente en une asymptotique presque sûre.

Théorème 2.2.4 (Théorème 4.1.4 ci-dessous)**.** *On suppose que la mesure spectrale est absolument continue $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ et que*

A.1 *il existe $\alpha > 0$ tel que ψ_ρ a une régularité de type Besov d'ordre α, i.e.*
$$\textit{pour tout } \delta > 0, \sup_{|h|\leq\delta} \|\psi_\rho(\cdot+h) + \psi_\rho(\cdot-h) - 2\psi_\rho(\cdot)\|_{L^1([0,2\pi])} = O(\delta^\alpha),$$

A.2 *il existe $\gamma > 0$ tel que*
$$\frac{1}{\psi_\rho} \in L^\gamma([0,2\pi]).$$

Alors, $\mathbb{P}$-presque sûrement
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{2.3}$$

Le Théorème 2.2.4 généralise donc au cas gaussien dépendant le résultat presque sûr récent de [AP19], obtenu pour des coefficients indépendants et identiquement distribués. L'hypothèse de régularité **A.1** apparaît naturellement sous forme intégrale dans la preuve (d'où l'énoncé avec une norme L^1 et une régularité de type Besov) mais cette condition est bien sûr satisfaite si l'on dispose d'estimés de régularité ponctuels plus classiques de type Hölder. Par ailleurs, l'hypothèse **A.2** de moment négatif pour la densité spectrale est à nouveau naturellement satisfaite sous les hypothèses de [ADP19] où celle-ci est minorée. En particulier, le théorème 2.2.4 s'applique si la suite des coefficients du polynôme trigonométrique est donnée par les incréments d'un mouvement brownien fractionnaire, ce pour tout indice de Hurst. On conclut alors que non seulement l'asymptotique nodale est universelle mais de plus qu'elle est presque sûre.

Concluons cette section en donnant une heuristique et les principaux ingrédients des preuves des Théorèmes 2.2.3 et 2.2.4 énoncés ci-dessus. Pour les deux énoncés, le point de départ n'est cette fois plus la formule de Kac–Rice, mais la stratégie mise en oeuvre dans [AP19] et exposée dans la Section 1.5 plus haut, qui utilise des variantes du théorème limite central presque sûr de Salem et Zygmund.

1. Rappelons que, d'après le Lemme 1.5.1 de représentation du nombre de zéros, si X est une variable de loi uniforme dans $[0, 2\pi]$, indépendante des coefficients du polynôme, et si on pose $g_n(t) := f_n(X + t/n)$ pour $t \in [0, 2\pi]$ on peut écrire

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \right]$$

et donc en prenant l'espérance sous la loi $\mathbb{P}$ des coefficients

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) \right]}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \right].$$

2. On généralise alors le théorème limite central fonctionnel obtenu dans [AP19] au cas de coefficients gaussiens dépendants. Précisément, on montre que $\mathbb{P}$-p.s., la suite de processus
$$\{g_n(\cdot)\}_{n\geq 1} \in \left(\mathcal{C}^1([0, 2\pi])\right)^{\mathbb{N}}$$
converge vers un processus limite explicite g_∞ pour la topologie $\mathcal{C}^1$ en établissant la convergence des marginales de rang fini ainsi qu'un critère de tension $\mathcal{C}^1$. Contrairement au cas i.i.d., le processus limite g_∞ n'est ici plus gaussien, mais il admet la representation en loi suivante

$$g_\infty(t) = \sqrt{\psi_\rho(X)} N_t,$$

où $(N_t)_{t\in[0,2\pi]}$ est un processus gaussien stationnaire de covariance sinus cardinal, indépendant de l'amplitude aléatoire $\sqrt{\psi_\rho(X)}$. Sous les hypothèses retenues, le processus limite est presque sûrement non-dégénéré.

3. En invoquant la continuité du nombre de zéros pour la topologie $\mathcal{C}^1$ et le "*continuous mapping theorem*" (voir Corollaire 1.4.1), on en déduit $\mathbb{P}$-p.s. la convergence en loi sous $\mathbb{P}_X$ quand n tend vers l'infini

$$\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \Rightarrow \mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]).$$

En particulier, cela permet d'en déduire que, sous $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X$, on a également la convergence en loi de $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ vers $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$.

4. Dans le but de pouvoir affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])] = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]) \right],$$

et respectivement

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \left[\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]) \right],$$

on est alors ramener à établir des estimés équi-intégrabilité dans chacun des cas envisagé.

5. Le cas le plus simple est celui de la convergence en moyenne. On montre que la seule hypothèse de log intégrabilité $\exists \eta > 0$ tel que

$$\log(\psi_\rho) \in L^{1+\eta}([0, 2\pi]),$$

permet alors d'affirmer que

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta/2} \right] < +\infty.$$

Ceci permet de conclure la preuve du Théorème 2.2.3.

6. Avec plus de travail, les hypothèses A.1 et A.2 permettent quant à elles de montrer que

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_X \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta/2} \right] < +\infty,$$

et donc de conclure à la convergence presque sûre du nombre de zéros normalisé par le degré dans le Théorème 2.2.4.

2.3 Synthèse du cas gaussien dépendant

Avant de conclure ce chapitre en décrivant nos résultats relatifs aux signaux périodiques aléatoires non-analytiques, nous faisons dans cette section un court résumé des résultats obtenus dans le cas de coefficients gaussiens dépendants.

Comme il a été dit précédemment, une des principales motivations de cette thèse a été d'explorer les liens entre la mesure spectrale μ_ρ induisant les processus gaussiens stationnaires $(a_k, b_k)_{k\geq 1}$ (coefficients du polynôme trigonométrique f_n) et l'asymptotique lorsque n tend vers l'infini du nombre moyen de zéros $\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n, [0, 2\pi]\right)\right]$.

Si nous récapitulons les contributions des articles [Pau20] et [APP21a], nous avons obtenu les résultats suivants :

1. Supposons que $\mu_\rho = \frac{\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}}{2}$ avec $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. Si $\varphi(n)$ est une suite d'entiers telle que $\varphi(n)\alpha$ converge vers $x \in (0, \pi)$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ alors il a été prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_{\varphi(n)}, [0, 2\pi])\right]}{\varphi(n)} - \ell^\alpha(x) \right| = 0, \tag{2.4}$$

où ℓ^α est la fonction / l'intégrale à paramètre explicitée dans la section 2.1.3 ci-dessus. En particulier, en étudiant plus précisément cette fonction, on montre que

☞ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n}\right)_{n\geq 1}$ est égal à l'intervalle $[\sqrt{2}, 2]$ et la suite en question ne converge pas.

2. Lorsque la mesure spectrale possède une partie absolument continue ψ_ρ telle que $\log(\psi_\rho) \in L^{1+\eta}$ avec $\eta > 0$ alors nous avons pu démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

☞On retrouve donc dans ce cas là, l'asymptotique universelle obtenue dans le cas de coefficients indépendants.

3. Lorsque la mesure spectrale possède une partie absolument continue régulière, par exemple si ψ_ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec une dérivée hölderienne, nous avons établi que l'asymptotique du nombre de zéros dépend linéairement de la mesure de Lebesgue de l'ensemble des zéros de ψ_ρ. Précisément, on a l'asymptotique

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} = \frac{\lambda\left(\{\psi_\rho \neq 0\}\right)}{\pi\sqrt{3}} + \frac{\lambda\left(\{\psi_\rho = 0\}\right)}{\pi\sqrt{2}}.$$

☞Ceci garantit à la fois la convergence de la suite $\left(\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n}\right)_{n\geq 1}$ et le fait que la limite est dans l'intervalle $[\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$.

On remarque que $\sqrt{2}$ ne peut être atteint car cela impliquerait que $\psi_\rho = 0$ Lebesgue presque partout, or c'est une densité de probabilité. Ce résultat peut être généralisé sous diverses hypothèses mais toutes requièrent sous une forme ou une autre des conditions de régularité sur la densité spectrale ψ_ρ.

Il est frappant de constater que les valeurs limites possibles dans le cas de mesures spectrales absolument continues soient dans $[\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$ qui est un intervalle **disjoint** de $[\sqrt{2}, 2]$ qui correspond aux valeurs d'adhérence dans le cas de mesures spectrales atomiques. Ceci nous amène à formuler quelques conjectures qui nous semblent naturelles à la vue de ces résultats.

1. Nous observons que dans les trois cas ci-dessus, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ est le nombre moyen de racines minimal. Nous conjecturons que, quelle que soit la mesure spectrale μ_ρ induisant les processus gaussiens stationnaires des coefficients de f_n nous avons

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Comme vu au Théorème 2.2.1 ci-dessus, l'inégalité de Fatou permet de répondre favorablement à la question si μ_ρ admet une partie à densité qui est non nulle Lebesgue presque partout. Lorsque ψ_ρ peut s'annuler, l'inégalité ci-dessus reste ouverte.

2. Une conjecture encore plus forte qui semble hors d'atteinte de nos méthodes est que si μ_ρ possède une partie absolument continue non nulle (sans hypothèse de régularité de la densité spectrale) alors

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} \to \frac{\lambda\left(\{\psi_\rho \neq 0\}\right)}{\pi\sqrt{3}} + \frac{\lambda\left(\{\psi_\rho = 0\}\right)}{\pi\sqrt{2}},$$

et si μ_ρ est purement singulière alors $\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} \geq \sqrt{2}$.

En effet, nous avons utilisé des approximations à l'ordre 2 dans les critères de Fejer-Lebesgue qui nécessitent de la régularité et étendre au delà du cas $\psi_\rho \in \mathcal{C}^{1+\eta}$ les conclusions du Théorème 2.2.2 semble délicat. Le cas où μ_ρ est une loi de Cantor (par exemple la loi de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{3^n}$ avec $(\epsilon_i)_{i\geq 0}$ des v.a. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$) est à cet égard très intéressant. En effet, ce dernier exemple ne rentre pas dans le cadre des mesures atomiques mais reste dans le contexte des mesures singulières. Des simulations informatiques semblent suggérer que dans ce cas, la suite $\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n}$ converge vers $\sqrt{2}$, ce qui est en accord avec la conjecture formulée plus haut.

☞ En conclusion, si ces conjectures étaient vraies, cela signifierait que l'on pourrait discriminer les mesures spectrales singulières des mesures spectrales ayant une partie absolument continue par rapport à Lebesgue par la seule connaissance des valeurs d'adhérence de $\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n}$, ce qui établirait un lien entre l'étude des racines des polynômes trigonométriques aléatoires et certaines questions fines de théorie de la mesure.

2.4 Signaux aléatoires périodiques non-analytiques

Cette section présente les motivations et contributions relatives au derniers travaux de cette thèse, qui font l'objet de l'article [APP21b], détaillé au Chapitre 5 ci-après. Jusqu'à présent, nous avons étudié les zéros de polynômes trigonométriques aléatoires en nous intéressant au rôle joué par les coefficients aléatoires dépendants. Ici, nous considérons des coefficients indépendants et identiquement distribués mais nous examinons plus particulièrement à l'influence du choix de la fonction aléatoire de base et de sa régularité sur le nombre moyen de zéros, en considérant des signaux périodiques obtenus comme superposition de signaux généraux 2π-périodiques et non-analytiques.

2.4.1 Modèle et résultats préexistants

Commençons par rappeler le modèle sous-jacent, jusqu'à présent seulement évoqué dans l'introduction du manuscrit. Il s'agit du modèle introduit et précédemment étudié par Angst et Poly dans [AP20b]. On considère $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables i.i.d., centrées avec variance unitaire, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On étudie les signaux 2π-périodiques généraux de la forme

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(kt), \quad t \in [0, 2\pi]$$

où f est continue 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et telle que $\langle f, f\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle f', f'\rangle > 0$, où $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel dans $L^2([0, 2\pi])$. L'archétype de fonction f que nous avons en tête est le signal triangulaire illustré ci-dessous. Le point important ici est que l'on impose aucune condition d'analycité sur la fonction f. De facto, on se prive donc de nombreux outils propres au monde analytique : principe des zéros isolés, borne *a priori* sur les zéros, formule de comptage de Jensen, etc. Ces outils sont utilisés de façon cruciale dans de nombreux travaux sur l'universalité des zéros, voir par exemple [IKM16] où le théorème de Hurwitz assure la continuité et la convergence des ensembles nodaux, ou encore [NV18] dont la formule de Jensen est le point de départ.

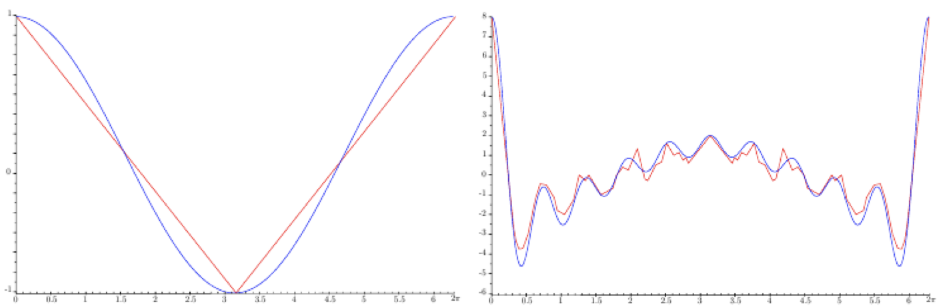

FIGURE 2.2 – À gauche, les fonctions cosinus (en bleu) et triangle (en rouge), à droite deux réalisations des signaux S_{10} associés pour des coefficients de loi de Rademacher.

L'ensemble nodal associé au signal périodique S_n a été étudié pour la première fois dans [AP20b] où les auteurs ont établi un principe d'universalité local. Ils considèrent ainsi renormalisation suivante

$$X_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k f\left(\frac{k(p_n + t)}{n}\right), \ t \in \mathbb{R},$$

où p_n est une suite d'entiers telle que $p_n/n \to \alpha \in (0, 2\pi)\backslash\pi\mathbb{Q}$. Moralement, il s'agit donc d'observer le signal S_n dans une fenêtre de taille $1/n$ au voisinage du point α. Les auteurs montrent alors que, sous différents jeux d'hypothèses précisés ci-après, le processus X_n converge en loi pour la topologie $\mathcal{C}^1$ vers un processus Gaussien stationnaire X_∞, explicite et non-dégénéré et par suite, pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a la convergence en loi

$$\mathcal{N}(X_n, [a, b]) \Rightarrow \mathcal{N}(X_\infty, [a, b]),$$

où la variable limite vérifie

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(X_\infty, [a, b])] = \frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{1}{3}\frac{< f', f' >}{< f, f >}}.$$

Il s'agit donc d'un résultat d'universalité locale, à l'échelle microscopique $1/n$ au voisinage de presque tout point de la période $[0, 2\pi]$. Les différents jeux d'hypothèses sous lesquels l'asymptotique nodale décrite ci-dessus a lieu font apparaître un compromis entre la régularité de la fonction de base f et l'existence de moments suffisamment grands pour les coefficients aléatoires (a_k). Le résultat est ainsi vérifié dans les quatre cas ci-dessous :

— $f \in \mathcal{C}^2$ (et pas de condition supplémentaire sur les coefficients (a_k)),
— il existe $\alpha > 0, \beta > 2$ tels que $\alpha\beta > 1$ de sorte que $f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$ et $\mathbb{E}\,|a_1|^\beta < \infty$,
— il existe $\alpha > 0$ tel que $f \in \mathcal{C}^{1+\alpha}$ et $\mathbb{E}|a_1|^4 < \infty$,
— α/π est un nombre diophantien, la suite p_n/n converge vers α a vitesse polynomiale, f est linéaire par morceaux et a_1 a un moment d'ordre 4.

Le cas le moins régulier du signal triangulaire évoqué plus haut correspond naturellement au dernier jeu d'hypothèses. Précisons rapidement les méthodes et techniques utilisées dans [AP20b]. La preuve de la convergence de la suite de processus $(X_n)_n$ se décompose classiquement en la convergence des marginales fini-dimensionnelles et la vérification d'un critère de tension. La convergence du nombre de zéros est alors une conséquence du continuous mapping theorem et du fait que le processus limite est non-dégénéré, cf le Corollaire 1.4.1 rappelé au chapitre précédent. L'étude du nombre moyen de zéros de X_∞ repose quant à elle sur la formule de Kac–Rice.

Notons que c'est la preuve de la tension des processus (X_n) qui requiert le plus d'attention, celle-ci devenant de plus en plus technique à mesure que la fonction f perd en régularité. À titre d'exemple, dans le cas du signal triangulaire affine par morceaux, le processus dérivé X'_n est un processus à sauts. Les auteurs de [AP20b] établissent alors la tension pour la topologie de Skorokhod via une discrétisation et des théorèmes limites en grande dimension [CCK17]. Le processus limite X'_∞ obtenu étant continu, le résultat s'étend à la topologie uniforme, puis la topologie $\mathcal{C}^1$ par intégration.

2.4.2 De l'universalité locale à l'universalité globale

L'objectif de l'article [APP21b] est d'étendre le principe d'universalité locale décrit plus haut en un résultat global. Il s'agit ainsi d'agréger les résultats locaux, i.e. les convergences en loi à l'échelle $1/n$ obtenues dans [AP20b], en un résultat macroscopique valable sur toute la période $[0, 2\pi]$. À l'image des résultats décrits précédemment, on souhaite également obtenir une convergence du nombre de zéros non seulement en loi mais aussi en espérance. Pour ce faire, nous avons en particulier besoin d'estimés a priori sur le nombre de zéros des fonctions considérées. Par exemple, dans le cas trigonométrique, on sait qu'un polynôme de degré n possède au plus $2n$ zéros sur la période. Il est clair que sous la seule hypothèse de régularité $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il n'existe pas d'estimés de ce type. Aussi, nous devons restreindre la classe de fonctions de base considérées en introduisant l'hypothèse suivante :

(H1) f est polynomiale par morceaux avec des raccords de classe $\mathcal{C}^{q_0}$.

Sous cette hypothèse, on peut en effet établir une borne a priori non plus linéaire mais quadratique sur le nombre de zéros du signal S_n en fonction de n. Par ailleurs, nous aurons besoin d'une autre hypothèse essentiellement technique pour gérer les phénomènes d'anti-concentration inhérents à l'estimation du nombre de zéros. Cette dernière hypothèse est implicite dans le cas des polynômes trigonométriques puisqu'elle se réduit au simple constat que $\cos(0) = 1$.

(H2) il existe un entier $j > 5$ et un voisinage compact V de zéro sur lequel la dérivée $j-$ième de f est minorée $\inf_{x\in V} |f^{(j)}(x)| > 0$.

On a alors le théorème principal d'universalité globale suivant.

Théorème 2.4.1 (Théorème 5.1.3 ci-après)**.** *On suppose que les coefficients i.i.d.* (a_k) *admettent un moment d'ordre* 4 *et que la fonction* f *vérifie les hypothèses* ***(H1)*** *et* ***(H2)****, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\mathcal{N}(S_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\langle f', f'\rangle}{\langle f, f\rangle}}.$$

Ce résultat appelle quelques commentaires :

— il montre effectivement qu'il n'y a pas besoin d'hypothèse d'analycité pour obtenir des résultats d'universalité globaux. Une borne a priori sur le nombre de zéros et une régularité d'ordre fini pour implémenter des estimés de type small ball suffisent à assurer le caractère universel de l'asymptotique nodale.

— Le cas représentatif du signal triangulaire échappe malheureusement aux hypothèses **(H1)** et **(H2)** du théorème. Dans ce cas particulier, même si l'hypothèse **(H1)** n'est pas vérifiée, il est cependant possible de donner une borne quadratique a priori sur le nombre de zéros. Malheureusement, nous nous sommes pas parvenu sur cet exemple à gérer les phénomènes d'anti-concentration. Les méthodes classiques d'estimation de "small ball" [Mas74, Fla17] consistent à dériver un certain nombre de fois le signal pour gagner en ordre de décroissance. Ces méthodes d'ordinaire efficaces sont vouées à l'échec ici pour un signal affine par morceaux, puisque les dérivées d'ordre supérieur à deux sont nulles presque partout.

— Il est possible de relaxer l'hypothèse **(H2)** ou d'en introduire de nombreuses variantes. Par exemple, la preuve du théorème d'adapte sans difficulté au cas on l'on suppose que $\inf_{x\in V} |f^{(j)}(x)| + |f^{(j+1)}(x)| > 0$. Dans le cas trigonométrique, cette dernière hypothèse revient naturellement à dire que les fonctions cos et sin ne s'annulent pas simultanément.

— En choisissant pour fonction de base la fonction $f = \cos$, on retrouve naturellement l'asymptotique universelle $2/\sqrt{3}$ du cas trigonométrique.

2.4.3 Méthode et obstacles

Nous concluons ce chapitre en décrivant les principales étapes et ingrédients de la preuve du Théorème 2.4.1. La stratégie adoptée pour démontrer ce résultat d'universalité globale est à nouveau celle exploitée dans [AP19, APP21a] et détaillée plus haut dans la Section 1.5, autrement dit elle repose sur des variantes du théorème limite central de Salem et Zygmund.

1. Pour faire apparaître une limite d'échelle non triviale, on commence par normaliser le signal S_n en introduisant

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k f(kt), \quad t \in [0, 2\pi].$$

2. On peut alors montrer le théorème limite central presque sûr suivant, qui généralise naturellement celui de Salem–Zygmund dans [SZ54]. Sous l'hypothèse $f \in H^1$, i.e. $\|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2} < +\infty$ et si X est une variable aléatoire uniforme dans $[0, 2\pi]$ indépendante des coefficients (a_k), alors $\mathbb{P}$-presque-sûrement $(f_n(X))_{n\geq 1}$ converge en loi sous $\mathbb{P}_X$ vers une variable gaussienne $\mathcal{N}(0, \langle f, f\rangle)$.

3. Comme dans le cas trigonométrique indépendant traité dans [AP19], on peut alors étendre ce résultat en un théorème limite central fonctionnel pour le processus g_n défini par

$$g_n(t) := f_n(X + t/n), \quad t \in [0, 2\pi].$$

   Ainsi si la fonction de base f assez régulière (par exemple $\mathcal{C}^2$ par morceaux suffit), la suite de processus $\{g_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ converge en loi sous la topologie $\mathcal{C}^1$ vers le processus gaussien stationnaire g_∞ dont la fonction de covariance est

$$\mathbb{E}_X[g_\infty(t) g_\infty(s)] = \rho(t-s)$$

   où

$$\rho(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{u} \displaystyle\int_0^u (f * \check{f})(x)dx, \ u \neq 0, \\ \rho(0) = \langle f, f\rangle \end{cases}$$

   avec $\check{f}(x) := f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Le processus limite étant non-dégénéré presque sûrement, par le continuous mapping theorem, on déduit que $\mathbb{P}$ presque sûrement, sous $\mathbb{P}_X$ on a la convergence en loi
$$\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \Longrightarrow \mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi]).$$
Par ailleurs, le nombre moyen de zéros du processus limite g_∞ est facilement obtenu par formule de Kac–Rice
$$\mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\langle f', f'\rangle}{\langle f, f\rangle}}.$$
5. Par le Lemme 1.5.1 de représentation du nombre de zéros, on a
$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(S_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])\right].$$
Aussi, afin de conclure à la convergence des espérances sous $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X$, il reste à établir que les intégrandes forment une famille équi-intégrables. On montre qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta}\right] < +\infty.$$
C'est la partie la plus délicate de la preuve, et c'est elle qui nécessite d'introduire les hypothèses **(H1)** et **(H2)**.
6. Grâce à l'hypothèse **(H1)**, qui assure une borne a priori quadratique sur le nombre de zéros, il existe une constante c telle que
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta}\right] = (1+\eta)\int_0^{cn^2} t^\eta \mathbb{P}(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > t)dt.$$
7. Par une routine classique, voir par exemple [AP15], on est alors amené à établir un estimé d'anti-concentration, i.e. on cherche à exhiber des bornes supérieures $C_j(\varepsilon, n)$ aussi bonnes que possibles tant en la variable ε qu'en la variable n pour les probabilités
$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|g_n^j(0)| \leq \varepsilon\right) \leq C_j(\varepsilon, n).$$
Les bornes $C_j(\varepsilon, n)$ doivent être en particulier assez bonnes pour pouvoir contrer le terme cn^2 i.e. la borne supérieure du domaine d'intégration. Nous utilisons alors une approche similaire à celle de [Fla17], qui sous l'hypothèse (H2) permet d'obtenir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que
$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|g_n^{(j)}(0)| \leq \varepsilon\right) \leq C\left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}n^{\frac{2j+1}{4}}}\right).$$
Ceci permet d'établir l'uniforme intégrabilité $(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]))_n$ et donc de conclure.

Deuxième partie

Details of the contributions

Chapter 3

The Gaussian case with a purely discrete spectral measure

This chapter is based on the article [Pau20], published in Electronic Communications in Probability in 2020.

3.1 Introduction and statement of the results

There is tremendous amount of literature about complex or real zeros of random polynomials and their asymptotics as the degree of the latter goes to infinity. Recently, the universality of these asymptotics has been established in a certain number of models, see e.g. [Kac43, IM71, Far86, Mat12, Muk19, NNV16, DNV18] in the case of algebraic polynomials and [AP15, ADL16, Fla17, IKM16, ADP19] in the case of trigonometric polynomials. The notion of universality stands here for the fact that these asymptotics do not depend on the choice of the law of the random entries, and to a certain extent, nor their correlation.

Our model belongs to the large class random trigonometric polynomials of the form

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R},$$

where $(a_k)_{k\geq 1}$ and $(b_k)_{k\geq 1}$ are two independent stationary Gaussian processes with correlation function $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, namely $\mathbb{E}[a_k a_l] = \mathbb{E}[b_k b_l] =: \rho(|k-l|)$ and $\mathbb{E}[a_k b_l] = 0$ for all $k, l \geq 1$. Thanks to Bochner's theorem, we then know that ρ is given by the Fourier transform of a finite measure μ, called the spectral measure, and supported on the torus $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. The case where $\rho(k) = 0$ for all $k \geq 1$ corresponds to independent Gaussian coefficients as first studied by Dunnage in [Dun66]. Later, in [Sam78] and [RS84], the authors considered the two "extreme" cases where $\mathbb{E}[a_i a_j] = \rho_0 \in]0,1[$ and $\mathbb{E}[a_i a_j] = \rho_0^{|i-j|}$ respectively.

More recently, the authors of [ADP19] considered the case where the spectral measure admits a density satisfying mild hypotheses. In all these cases, it was shown that $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$, the number of real zeros of the random function f_n in the interval $[0, 2\pi]$, obeys the same limit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

This naturally raises the question of the existence of choices of "exotic" random entries such that the asymptotics of the expected number of real zeros do not coincide with the universal one. In fact, considering standard Gaussian coefficients, one way to obtain asymptotics that do not match $2/\sqrt{3}$ is to consider palindromic entries as in [FL12, Pir21] or very special pairwise block entries such as in Theorem 2.3 and 2.4 of [Pir20].

We consider here the natural and purely singular case where the spectral measure is given by $\mu := \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}) \iff \rho(k) = \cos(k\alpha)$, for some real $\alpha \geq 0$. If $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, the correlation function is periodic and the corresponding random coefficients of f_n are strongly correlated at arbitrary large distance. If $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, the sequence $(\rho(k))_{k\geq 0}$ is dense in $[-1, 1]$ and the correlations between the random coefficients of f_n become really intricate. We shall see that the asymptotics of the number of real zeros of f_n then heavily depends on the arithmetic nature of α and more precisely on the distance of $n\alpha$ to $\pi\mathbb{Z}$.

Naturally, since f_n is a random trigonometric polynomial of degree n, its number of zeros in bounded by $2n$. In the case where $n\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, we show that the expected number of real zeros is maximal in the following sense.

Proposition 3.1.1. *If $\alpha = 0$, then for all $n \geq 1$ we have almost surely*

$$\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) = 2n.$$

If $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$ then

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} - 2 \right| \mathbb{1}_{n\alpha\in\pi\mathbb{Z}} = 0. \tag{3.1}$$

The case $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ is more intriguing: properly renormalized, the expected number of real zeros of f_n does not converge as n goes to infinity and admits in fact a whole continuum of subsequential limits.

Let us introduce the function $\ell^\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^+$ defined by

$$\ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_x^\alpha(s, u)|^2} ds du,$$

where

$$g_x^\alpha(s, u) := \frac{\sin(x) \sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}.$$

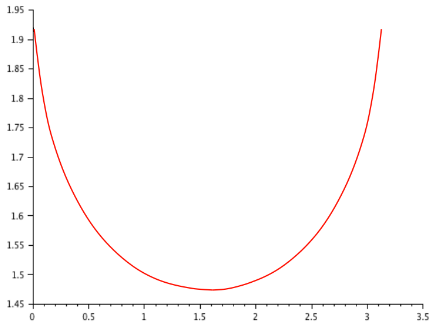

Figure 3.1 – Graph of $\ell^{1/2}(x)$

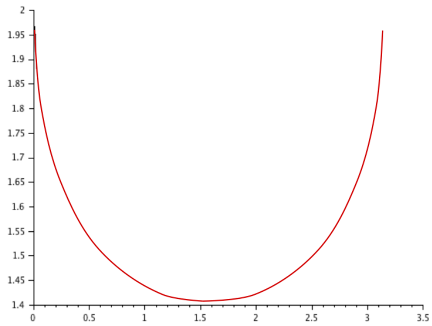

Figure 3.2 – Graph of $\ell(x)$

In Section 3.3.1 below, we examine the properties of ℓ^{α} and its pointwise limit as α goes to zero.

The main result of the paper is then the following one.

Theorem 3.1.1. *For all $0 < \beta < 1$ and for all n large enough such that $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, we have*

$$\left| \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} - \ell^{a}(n\alpha \bmod \pi) \right| = O\left(\frac{1}{n^{\beta}(1 - |\cos(n\alpha)|)^2} \right) + o(1).$$

The above theorem shows that if n is sufficiently large but $n\alpha$ stays away enough from $\pi\mathbb{Z}$, then the expected number of real zeros on f_n divided by n is close to the value of the function ℓ^{α} at the point $n\alpha \bmod \pi$. In particular, if $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, then the sequence $(n\alpha \bmod \pi)_{n\geq 1}$ takes values in a finite set S.
From the above Theorem 3.1.1, we can then deduce the following corollary.

Corollary 3.1.1. *If $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, then for all $x \in S\backslash\{0\}$*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} - \ell^{\alpha}(x) \right| \mathbb{1}_{n\alpha = x \bmod \pi} = 0.$$

In particular $n^{-1}\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]$ does not converge as n goes to infinity.

Now if $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, the sequence $(n\alpha \bmod \pi)_{n\geq 1}$ is dense in $[0, \pi]$ and from Theorem 3.1.1, one then deduces that $n^{-1}\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]$ admits a whole continuum of possible limits.

Corollary 3.1.2. *Let us fix $x \in (0, \pi)$ and consider a increasing subsequence $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ such that $\varphi(n)\alpha$ converges to x as n goes to infinity. Then*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_{\varphi(n)}, [0, 2\pi])\right]}{\varphi(n)} - \ell^{\alpha}(x) \right| = 0.$$

Corollary 3.1.3. *For all $\varepsilon > 0$, for all $\ell \in (\sqrt{2}, 2]$, there exists $\alpha = \alpha(\ell) \geq 0$ small enough and infinitely many integers n such that*

$$\left|\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} - \ell\right| \leq \varepsilon$$

where the Gaussian entries $(a_k)_{k\geq 1}$ and $(b_k)_{k\geq 1}$ of f_n admit $\frac{\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}}{2}$ as spectral measure.

Remark 3.1.1. *For sake of clarity, we only deal here with a purely atomic spectral measure μ with two atoms $\pm\alpha$, but the method employed will work for any finite combination of atoms $(\pm\alpha_i)_{1\leq i\leq N}$. The choice of a purely singular spectral measure could sound very particular but it actually dictates the fluctuating behavior of the expected number of zeros. Indeed, let us assume that the spectral measure μ can be written as the convex combination of a density measure and such a purely atomic measure, i.e.*

$$\mu = (1-\eta)\mu_d + \eta \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha_k} + \delta_{-\alpha_k}\right), \quad \eta \in [0,1)\ ,\ \alpha_k \geq 0,$$

with μ_d admitting a density ψ w.r.t. the Lebesgue measure on $[0, 2\pi]$ and satisfying the same assumptions as in [ADP19]. Then, combining the proof of the latter reference and the one of the present paper, one can show that

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

In other words, as soon as the spectral measure is not purely singular and have a density component, one recovers the universal asymptotics of the independent and weakly dependent case.

The rest of the paper is devoted to the proofs of the results stated above. In Section 3.2, we give the proof of Proposition 3.1.1. Section 3.3 is devoted to the proof of the main Theorem 3.1.1 and its corollaries in the case where $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$. In this case, the study of the number of zeros is split into two parts: in Section 3.3.1 we determine the number of zeros away from the atoms $\pm\alpha$ of the spectral measure μ. Finally, the numbers of zeros in the neighborhood of the atoms is shown to be negligible in the last Section 3.3.2.

3.2 Asymptotics in the case $n\alpha \in \pi\mathbb{Z}$

In this Section, we give the proof of Proposition 3.1.1 describing the asymptotics of the number of real zeros of f_n under the condition $n\alpha \in \pi\mathbb{Z}$. Let us first consider the very particular case where $\alpha = 0$, i.e. the correlation function ρ is constant equal to one.

Proposition 3.2.1. *Suppose that $\alpha = 0$, i.e. $\rho(k) = 1$ for all $k \in \mathbb{N}$, then almost surely, for all $n \geq 1$ we have*

$$\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) = 2n.$$

Proof. Under the condition $\alpha = 0$, the function f_n has the simple form

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(A \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) + B \sum_{k=1}^{n} \sin(kt) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(A \cos\left(\frac{n+1}{2} t\right) + B \sin\left(\frac{n+1}{2} t\right) \right) \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \quad a.s. \end{aligned}$$

where A, B are two independent standard Gaussian variables. Hence we count $n-1$ deterministic zeros corresponding to $\sin(nt/2) = 0$ and $n+1$ random zeros given by $t(\omega) = \frac{2\pi}{n+1} U(\omega) + \frac{2k\pi}{n+1}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$, where $U = \pi/2 - \frac{1}{\pi} \arctan(-A/B)$ is uniform on $[0,1]$. $\square$

Let us now suppose that $\alpha = \frac{2\pi p}{q}$ for positive and coprime integers p and q, i.e. the correlation sequence $(\rho(k))_k$ is $q-$periodic. In this case, if $n = qr$ for some positive integer r, we have $n\alpha \in \mathbb{Z}$ and f_n admits the following factorization

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{q} \left(a_k \sum_{\ell=0}^{r-1} \cos((\ell q + k)t) + b_k \sum_{\ell=0}^{r-1} \sin((\ell q + k)t) \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \widetilde{f_n}(t) \times \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{qt}{2}\right)},$$

where we have set

$$\widetilde{f_n}(t) := \sum_{k=1}^{q} a_k \cos\left(kt + \frac{(n-q)t}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{(n-q)t}{2}\right).$$

The above factorization of f_n invites to distinguish deterministic and random zeros. We have $n-q$ deterministic zeros given by

$$\sin\left(\frac{nt}{2}\right) = 0 \text{ and } \sin\left(\frac{qt}{2}\right) \neq 0 \iff t \in \left\{ \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, \ldots, n-1\}, r \nmid k \right\}.$$

Therefore the second statement in Proposition 3.1.1 follows from the following result which implies that, in the above framework, the expected number of real zeros of $\widetilde{f_n}$ is asymptotic to n.

Proposition 3.2.2. *As n tends to infinity, we have*

$$\liminf_{\substack{n \to +\infty \\ q|n}} \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\mathcal{N}(\widetilde{f_n}, [0, 2\pi]) \right] \geq 1.$$

Proof. A direct computation shows that if $q \mid n$

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{f_n}(t)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{q(\alpha+t)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{(\alpha+t)}{2}\right)} + \frac{\sin^2\left(\frac{q(\alpha-t)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{(\alpha-t)}{2}\right)} \right].$$

Since $q\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, we have thus for $t \in [0, 2\pi]$

$$\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)^2] = 0 \Longrightarrow qt/2 \in \pi\mathbb{Z} \Longrightarrow t \in S_q := \left\{ \frac{2\pi k}{q},\ 0 \leq k \leq q-1 \right\}.$$

For $\varepsilon > 0$, set $S_q^\varepsilon := \{t \in [0, 2\pi], \mathrm{dist}(t, S_q) > \varepsilon\}$. On S_q^ε, we have $\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)^2] > 0$ and applying Kac–Rice formula (see e.g. Theorem 3.2 p. 71 of [AW09]), we get

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}(\widetilde{f}_n, S_q^\varepsilon)] = \frac{1}{\pi} \int_{S_q^\varepsilon} \sqrt{\frac{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n'(t)^2]}{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)^2]} - \left(\frac{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)\widetilde{f}_n'(t)]}{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)^2]} \right)^2}\, dt. \tag{3.2}$$

A straightforward computation shows that as n goes to infinity, uniformly in $t \in S_q^\varepsilon$

$$\mathbb{E}[\widetilde{f}_n'(t)^2] = \left(\frac{n-q}{2} \right)^2 \mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)^2] + o(n^2).$$

Since $\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)^2]$ does not depend on n, neither does $\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)\widetilde{f}_n'(t)]$ so that as n goes to infinity, we have uniformly in $t \in S_q^\varepsilon$

$$\sqrt{\frac{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n'(t)^2]}{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)^2]} - \left(\frac{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)\widetilde{f}_n'(t)]}{\mathbb{E}[\widetilde{f}_n(t)^2]} \right)^2} = \frac{n}{2} \left(1 + o(1)\right).$$

Injecting this estimate in Equation (3.2), we deduce that as n goes to infinity

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(\widetilde{f}_n, S_q^\varepsilon)]}{n} = \frac{|S_q^\varepsilon|}{2\pi} \left(1 + o(1)\right) = 1 + O(\varepsilon) + o(1).$$

Letting $\varepsilon \to 0$, $\liminf_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(\widetilde{f}_n, [0,2\pi])}{n} \geq \liminf_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(\widetilde{f}_n, S_q^\varepsilon)]}{n} = 1.$

□

3.3 Asymptotics in the case $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$

We now consider the more intriguing case where $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$. Following [ADP19], the variance and covariance of $(f_n(t), f_n'(t))$ can then be written as convolutions of the spectral measure μ with explicit trigonometric kernels, namely

$$\mathbb{E}[f_n(t)^2] = K_n * \mu(t), \quad \mathbb{E}[f_n(t)f_n'(t)] = \frac{1}{2} K_n' * \mu(t), \quad \mathbb{E}[f_n'(t)^2] = \frac{1}{\alpha_n} L_n * \mu(t), \tag{3.3}$$

where $K_n(x) := \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$ is the Fejer kernel, so that

$$K_n'(x) := \frac{2}{n} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right) \left(\frac{n\cos(nx/2)}{2\sin(x/2)} - \frac{\sin(nx/2)\cos(x/2)}{2\sin(x/2)^2} \right),$$

the normalization constant α_n is given by $\alpha_n := 6/(n+1)(2n+1)$ and

$$L_n(x) := \frac{\alpha_n}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} k e^{ikx}\right|^2 = \frac{\alpha_n}{n}\frac{(n+1)^2}{4\sin(x/2)^2}\left|1 - \frac{\left(1-e^{i(n+1)x}\right)e^{-inx}}{(n+1)\left(1-e^{ix}\right)}\right|^2.$$

Lemma 3.3.1. *For $0 < \varepsilon \leq 1$, define $F_\varepsilon := \{x \in [0, 2\pi], |\sin(x/2)| \geq \varepsilon\}$. Then for all $n \geq 1$ such that $n\varepsilon > 1$, we have the uniform estimates*

$$\sup_{x\in F_\varepsilon}\left|K_n'(x) - \frac{\sin(nx/2)\cos(nx/2)}{\sin(x/2)^2}\right| = O\left(\frac{1}{n\varepsilon^3}\right), \sup_{x\in F_\varepsilon}\left|L_n(x) - \frac{\alpha_n n}{4\sin(x/2)^2}\right| = O\left(\frac{1}{n^2\varepsilon^3}\right).$$

Proof. The estimate for K_n' is immediate. Since on F_ε,

$$u := \frac{\alpha_n}{n}\frac{(n+1)^2}{4\sin(x/2)^2} \leq \frac{\alpha_n}{n}\frac{(n+1)^2}{4\varepsilon^2}, \quad z := \frac{\left(1-e^{i(n+1)x}\right)e^{-inx}}{(n+1)\left(1-e^{ix}\right)} \leq \frac{1}{(n+1)|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{n\varepsilon},$$

as soon as $n\varepsilon > 1$, standard computations lead to

$$|L_n(x) - u| \leq \frac{\alpha_n}{n}\frac{(n+1)^2}{4\varepsilon^2} \times \left[\frac{3}{n\varepsilon}\right] = O\left(\frac{1}{n^2\varepsilon^3}\right).$$

Moreover, we have

$$\left|\frac{\alpha_n}{n}\frac{(n+1)^2}{4\sin(x/2)^2} - \frac{\alpha_n n}{4\sin(x/2)^2}\right| = \frac{\alpha_n}{4\sin(x/2)^2}\left|\frac{(n+1)^2}{n} - n\right| = O\left(\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2\varepsilon^3}\right),$$

hence the result. □

In the case we consider here, the spectral measure μ is $\frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})$ so that we have simply

$$\mathbb{E}[f_n(t)^2] = \frac{1}{2}\left(K_n(t-\alpha) + K_n(t+\alpha)\right), \mathbb{E}[f_n(t)f_n'(t)] = \frac{1}{4}\left(K_n'(t-\alpha) + K_n'(t+\alpha)\right),$$

$$\text{and } \mathbb{E}[f_n'(t)^2] = \frac{1}{2}\left(L_n'(t-\alpha) + L_n'(t+\alpha)\right).$$

The Fejér kernel being non negative, for $n \geq 1$, we have

$$\mathbb{E}[f_n(t)^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} nt \in \pi\mathbb{Z} \\ n\alpha \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Under the assumption $n\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, the distribution of the Gaussian variable $f_n(t)$ is thus non-degenerated for all $t \in [0, 2\pi]$ and as above, we can use Kac–Rice formula (see e.g. [AW09]) to compute the expectation of $\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])$, namely

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{I_n(t)}dt,$$

where

$$I_n(t) := \frac{1}{\alpha_n}\frac{L_n(t-\alpha)+L_n(t+\alpha)}{K_n(t-\alpha)+K_n(t+\alpha)} - \frac{1}{4}\left(\frac{K_n'(t-\alpha)+K_n'(t+\alpha)}{K_n(t-\alpha)+K_n(t+\alpha)}\right)^2.$$

We split the computation of the integral into two parts, depending on the proximity between the integration variable t and the atoms $\pm\alpha$ of the spectral measure μ.

Remark 3.3.1. *Alternatively, one can represent the processes $(a_k)_k$ and $(b_k)_k$ as*

$$a_k = \xi_1 \cos(k\alpha) + \xi_2 \sin(k\alpha) \quad , \ b_k = \xi_3 \cos(k\alpha) + \xi_4 \sin(k\alpha),$$

where $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ are independent standard Gaussian variables. In particular, the covariance function $r_n(t-s) := \mathbb{E}[f_n(t)f_n(s)]$ can be explicitly computed. The quantities involved in Kac–Rice formula thus correspond to $r_n(0)$, $\partial_t\partial_s r_n(t-s)_{|t=s}$ and $\partial_s r_n(t-s)_{|t=s}$ and standard computations give the same expressions as given above.

3.3.1 Away from the atoms

Let us fix $\varepsilon > 0$ and consider the set

$$J_\varepsilon := \{t \in [0,2\pi], |\sin(\frac{t-\alpha}{2})| > \varepsilon, |\sin(\frac{t+\alpha}{2})| > \varepsilon\}.$$

Thanks to Lemma 3.3.1, we have then uniformly in $t \in J_\varepsilon$

$$\frac{L_n(t-\alpha)+L_n(t+\alpha)}{K_n(t-\alpha)+K_n(t+\alpha)} = \frac{\frac{\alpha_n n^2}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\right) + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^3}\right)}{\frac{\sin^2\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)} + \frac{\sin^2\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}}.$$

In the same manner, we have

$$\frac{K_n'(t-\alpha)+K_n'(t+\alpha)}{K_n(t-\alpha)+K_n(t+\alpha)} = \frac{\frac{\sin\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)\cos\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)} + \frac{\sin\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)\cos\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^3}\right)}{\frac{\sin^2\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)} + \frac{\sin^2\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}}.$$

Now remark that uniformly on J_ε we have

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{\sin^2\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)} + \frac{\sin^2\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2\left(\sin^2\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\varepsilon^2(1-\cos(nt)\cos(n\alpha))} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2(1-|\cos(n\alpha)|)}.\end{aligned}$$

Therefore, uniformly on J_ε we get

$$I_n(t) = \frac{n^2}{4}\left(Q_n(t) + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^5(1-|\cos(n\alpha)|)}\right)\right),$$

where after standard calculations

$$Q_n(t) = 1 + \left(\frac{\sin(n\alpha)\sin\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}{\left(\sin^2\left(n\frac{t-\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(n\frac{t+\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\right)} \right)^2 .$$

In particular, we get

$$\frac{2}{n}\int_{J_\varepsilon} \sqrt{I_n(t)}dt = \int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^5(1-|\cos(n\alpha)|)}\right). \tag{3.4}$$

In order to make explicit the asymptotics of the right hand side of the last equation, let us now introduce an auxilary function and detail some of its properties.

An auxilary function and its properties

For $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, let us introduce the function g_x^α defined on $[0,2\pi]^2\backslash\{\pm(\alpha,x)\}$ by

$$g_x^\alpha(s,u) := \frac{\sin(x)\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)}. \tag{3.5}$$

Remark that $u \mapsto g_x^\alpha(s,u)$ is then $2\pi-$periodic and that we have the identification

$$Q_n(t) = 1 + |g_{n\alpha}^\alpha(t,nt)|^2. \tag{3.6}$$

The function $(u,s) \mapsto g_x^\alpha(s,u)$ has singularities at $(s,u) = \pm(\alpha,x)$ but these singularities are integrable in the following sense.

Lemma 3.3.2. *Let $0 < \alpha < \pi$ and $0 < x < \pi$. For all $0 \leq \eta < 1$, we have*

$$\int_{[0,2\pi]^2} |g_x^\alpha(s,u)|^{1+\eta} ds du < +\infty.$$

Proof. Let us fix some small $\delta > 0$. Outside the two balls $B(\pm(\alpha,x),\delta)$ the function $(s,u) \mapsto g_x^\alpha(s,u)$ is uniformly bounded hence in $\mathbb{L}^p$ for all $p \geq 1$, so we only need to focus on the integrability on $B(\pm(\alpha,x),\delta)$. By symmetry, we can restrict ourselves to the ball centered at (α,x). If we set $C := \min(|\sin(x)|,|\sin(\alpha)|) > 0$, for δ small enough we have

$$|g_x^\alpha(s,u)| \leq \frac{4}{C}\frac{|s-\alpha|}{|s-\alpha|^2+|u-x|^2},$$

so that using polar coordinates $(s-\alpha, u-x) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ with $0 \leq r \leq \delta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, we get

$$\int_{B((\alpha,x),\delta)} |g_x^\alpha(s,u)|^{1+\eta} ds du \leq \frac{8\pi}{C}\int_0^\delta \frac{dr}{r^\eta} = O\left(\delta^{1-\eta}\right).$$

$\square$

Lemma 3.3.3. *The function* $\ell^\alpha : K \to \mathbb{R}^+$

$$(0,\pi) \ni x \mapsto \ell^\alpha(x) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_x^\alpha(s,u)|^2} ds du$$

is continuous.

Proof. Note that the regularity of $x \mapsto \ell^\alpha(x)$ is the same as the one of $x \mapsto \int_{[0,2\pi]^2} |g_x^\alpha(s,u)| ds du$. Fix $\varepsilon > 0$, from the proof of Lemma 3.3.2 applied with $\eta = 0$, there exists $\delta > 0$ small enough such that, for all $x \in K$, if $E_x := B((\alpha,x),\delta) \cup B(-(\alpha,x),\delta)$ then

$$\int_{E_x} |g_x^\alpha(s,u)| ds du \leq \varepsilon/4.$$

Now, if $(s,u) \in E_x^c \cap E_{x'}^c$ the function $x \mapsto |g_x^\alpha(s,u)|$ is uniformly bounded and analytic so that choosing $\delta > 0$ small enough , for $|x - x'| < \delta$ we have

$$\left| \int_{E_x^c \cap E_{x'}^c} \left(|g_x^\alpha(s,u)| - |g_{x'}^\alpha(s,u)| \right) ds du \right| \leq \varepsilon/2.$$

The conclusion follows from this last estimate and triangular inequality. $\square$

The next lemma giving some properties of g_x^α which will be particularly useful in the sequel.

Lemma 3.3.4.

$$\sup_{\substack{s \in J_\varepsilon \\ u \in [0,2\pi]}} |g_x^\alpha(s,u)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{1 - |\cos(x)|} \right),$$

$$\sup_{\substack{s,s' \in J_\varepsilon \\ u \in [0,2\pi]}} |g_x^\alpha(s,u) - g_x^\alpha(s',u)| = O\left(\frac{|s - s'|}{\varepsilon^4 |1 - |\cos(x)||^2} \right). \tag{3.7}$$

Proof. If $s \in J_\varepsilon$, we have uniformly in $u \in [0, 2\pi]$

$$|g_x^\alpha(s,u)| \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \left[\sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right) \right]} = \frac{1}{\varepsilon^2 \left(1 - \cos(u)\cos(x)\right)} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{1 - |\cos(x)|}.$$

Moreover, for $s, s' \in J_\varepsilon$, setting $D(s) := \left(\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{s-\alpha}{2}\right) \right)$

$$\begin{aligned} |g_x^\alpha(s,u) - g_x^\alpha(s',u)| &\leq \frac{|\sin\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{s'-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{s'+\alpha}{2}\right)|}{D(s)} + \frac{|D(s) - D(s')|}{|D(s)D(s')|} \\ &= O\left(\frac{|s-s'|}{\varepsilon^2(1 - |\cos(x)|)} \right) + O\left(\frac{|s-s'|}{\varepsilon^4(1 - |\cos(x)|)^2} \right). \end{aligned}$$

$\square$

For $x \in (0,\pi)$, set

$$\ell^0(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+g_x^0(u)^2}du, \quad \text{where} \quad g_x^0(u) := \frac{\sin(x)}{1-\cos(u)\cos(x)}.$$

We show now that the function ℓ^0 appears naturally as the pointwise limit of ℓ^α given in Section 3.1 when $\alpha \in (0,\pi)$ goes to zero.

Lemma 3.3.5. *For all $x \in (0,\pi)$, we have $\lim_{\alpha\to 0} \ell^\alpha(x) = \ell^0(x)$.*

Proof. Let $\epsilon > 0$ and let $\alpha \in \left(0, \frac{\epsilon}{2}\right)$ be small enough. We can write

$$\ell^\alpha(x) = \frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{|s|>\epsilon}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+g_x^\alpha(s,u)^2}dsdu + \int_{|s|\le\epsilon}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+g_x^\alpha(s,u)^2}dsdu\right]. \quad (3.8)$$

For $|s| > \epsilon$, there exists a constant $C > 0$ such that $\left|\sin\left(\frac{s\pm\alpha}{2}\right)\right| \ge C\epsilon$. By dominated convergence (using Lemma 3.3.4 for the upper bound), we first obtain

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{|s|>\epsilon}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+g_x^\alpha(s,u)}dsdu = 2(\pi-\epsilon)\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\frac{\sin^2(x)}{(1-\cos(u)\cos(x))^2}}ds.$$

Let us now show that the second term in Equation (3.8) converges to zero as α goes to zero. By symmetry, we can restrict ourselves to the case $s \in [0,\epsilon]$. This way, $s \pm \alpha$ is close to zero. Thus, there exists $C > 0$ such that

$$|g_x^\alpha(s,u)| \le C\frac{|\sin(x)||(s-\alpha)(s+\alpha)|}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)(s+\alpha)^2 + \sin^2\left(\frac{u+x}{2}\right)(s-\alpha)^2}.$$

Set $\delta > 0$ small enough such that for all $u \in [x-\delta, x+\delta]$, we have $\left|\sin\left(\frac{u-x}{2}\right)\right| \ge C_\delta|u-x|$ and $\left|\sin\left(\frac{u+x}{2}\right)\right| \ge C_\delta \sin(x)$. Using the fact that $s+\alpha \ge \alpha$, we get that for some the constant C which may change from line to line

$$\begin{aligned}
\int_0^\epsilon\int_{x-\delta}^{x+\delta} |g_x^a(s,u)|duds &\le C\int_0^\epsilon\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{|s^2-\alpha^2|}{(s-\alpha)^2+\alpha^2(u-x)^2}duds \\
&\le C\int_0^\epsilon \frac{|s+\alpha|}{\alpha}\arctan\left(\frac{\delta\alpha}{|s-\alpha|}\right)ds \\
&\le \int_0^\epsilon \frac{|s-\alpha|}{\alpha}\arctan\left(\frac{\delta\alpha}{|s-\alpha|}\right)ds + \underbrace{2\int_0^\epsilon \arctan\left(\frac{\delta\alpha}{|s-\alpha|}\right)ds}_{\le C\epsilon} \\
&\le \epsilon\times\frac{\alpha}{\epsilon}\int_{-\frac{\epsilon}{\alpha}}^{\frac{\epsilon}{\alpha}} |v|\arctan\left(\frac{\delta}{|v|}\right)dv + C\epsilon \le C\epsilon.
\end{aligned}$$

thanks to the change of variable $v = \frac{s-\alpha}{\alpha}$ and the fact that $x \mapsto x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ is bounded on $\mathbb{R}$.

The same method naturally works in the neighborhood of $-x$. Otherwise, if we denote by E_δ the set $([x-\delta,x+\delta]\cup[-x-\delta,-x+\delta])^c$, there exists a constant $C_{x,\delta}$ such that for all u in E_δ, we have $\left|\sin\left(\frac{u\pm x}{2}\right)\right| \geq C_{x,\delta}$. Thus, for some constant which may again change from line to line, we get

$$\begin{aligned}\int_0^\epsilon \int_{E_\delta} |g_x^\alpha(s,u)| ds du &\leq C\int_0^\epsilon \frac{|s^2-\alpha^2|}{(s-\alpha)^2+(s+\alpha)^2} ds \\ &\leq C \underbrace{\int_0^\epsilon \frac{|s^2+\alpha^2|}{s^2+\alpha^2} ds}_{=\epsilon} + 2\alpha^2 \int_0^\epsilon \frac{ds}{s^2+\alpha^2} \leq C(\epsilon+\alpha) \leq C\epsilon,\end{aligned}$$

hence the result. □

Let us conclude this section with some properties of the limit function $\ell^0(x)$.

Lemma 3.3.6. *The function $x \mapsto \ell^0(x)$ is analytic on $(0,\pi)$ and admits $x=\frac{\pi}{2}$ as a symmetry axis. Moreover, $[\sqrt{2},2) \subseteq \ell^0[(0,\pi)]$.*

Proof. Analyticity follows form standard dominated convergence. Using the change of variable $v=u+\pi$ and 2π-periodicity of the integrand, we get that for all $z \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\ell^0\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\ell^0\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$. Therefore $x=\frac{\pi}{2}$ is a symmetry axis.
The inequality $\ell(x)\leq 2$ results from the fact that

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{1-\cos(u)\cos(x)} du = 1.$$

In fact, the upper value 2 is obtained as the limit on the boundaries.
Set $\delta>0$ and let x be small enough. We can indeed write

$$\ell^0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \sqrt{1+g_x^0(u)^2} du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{1+g_x^0(u)^2} du.$$

By dominated convergence (using the upper bound for g_x^0 as in Lemma 3.3.4),

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \sqrt{1+\frac{\sin^2(x)}{(1-\cos(x)\cos(u))^2}} du = 1. \tag{3.9}$$

On the other hand, we can assume that $\int_{-\delta}^{\delta}\sqrt{1+g_x^2(u)}du \geq \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\sqrt{1+g_x^2(u)}du$ for x small enough.

Then, we get

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sqrt{1+g_x^2(u)} du &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+g_x^2(u)} du \geq \frac{\sin(x)}{\pi}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin(x)}{1-\cos(u)\cos(x)} du \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sin(x)\int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{u^2+x^2} = \frac{2}{\pi}\times\frac{\sin(x)}{x}\times\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)\end{aligned}$$

since $1-\cos(u)\cos(x) \leq \frac{u^2+x^2}{2}$. Hence we get

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\delta,\delta]} \sqrt{1+g_x^2(u)}du \geq 1, \tag{3.10}$$

Finally, combining the estimates (3.9) and (3.10), we obtain $\lim_{x\to 0} \ell^0(x) = 2$. The analogue limit as x tends to π is deduced by symmetry. Since $\ell^0(\pi/2) = \sqrt{2}$ and ℓ^0 is continuous, the intermediate value theorem yields that $[\sqrt{2}, 2) \subset \ell^0[(0,\pi)]$. $\square$

From Riemann sum to integral

We can now establish the asymptotics of Equation (3.4) as n goes to infinity. As a first step, the integral of interest admits the following lower and upper bounds.

Lemma 3.3.7. *If $n\varepsilon >> 1$, then as n goes to infinity, we have*

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1+|g_{n\alpha}^\alpha(s,u)|^2} \mathbb{1}_{s\in J_{2\varepsilon}} ds du + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^2(1-|\cos(n\alpha)|)}\right),$$

and

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1+|g_{n\alpha}^\alpha(s,u)|^2} \mathbb{1}_{s\in J_{\varepsilon/2}} ds du + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^2(1-|\cos(n\alpha)|)}\right).$$

Proof. We give the proof of the upper bound, the lower bound can be treated in the exact same way. To simplify the expressions, let us set $E_n^k := \left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n}\right]$ for $0 \leq k \leq n-1$. We can then decompose the integral on J_ε as

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{J_\varepsilon \cap E_n^k} \sqrt{Q_n(t)}dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{Q_n\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{u}{n}\right)} \mathbb{1}_{\frac{2\pi k+u}{n} \in J_\varepsilon} du.$$

Now remark that if $n\varepsilon >> 1$, then for n large enough, if $\frac{2\pi k+u}{n} \in J_\varepsilon$ we have in fact $E_n^k \subset J_{\varepsilon/2}$. Therefore

$$\begin{aligned} \int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{Q_n\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{u}{n}\right)} \mathbb{1}_{E_n^k \subset J_{\varepsilon/2}} du \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+g_{n\alpha}^\alpha\left(\frac{2\pi k}{n} + \frac{u}{n}, u\right)} \mathbb{1}_{E_n^k \subset J_{\varepsilon/2}} du \end{aligned}$$

thank to (3.6) and the $2\pi-$periodicity of $u \mapsto g_{n\alpha}^\alpha(s,u)$.
Using the estimate (3.7) of Lemma 3.3.4, one then deduces that

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+g_{n\alpha}^\alpha\left(\frac{2\pi k}{n}, u\right)} \mathbb{1}_{E_n^k \subset J_{\varepsilon/2}} du + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^4|1-|\cos(n\alpha)|)^2}\right). \tag{3.11}$$

Using again Equation (3.7) of Lemma 3.3.4, for all $0 \le k \le n-1$ such that $E_n^k \subset J_{\varepsilon/2}$, we have uniformly in u

$$\left| \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}\left(\frac{2\pi k}{n}, u\right)} - \frac{n}{2\pi}\int_{E_n^k} \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)}ds \right| = O\left(\frac{1}{n\varepsilon^4 |1 - |\cos(n\alpha)||^2}\right).$$

Integrating in u, we thus get that for all k such that $E_n^k \subset J_{\varepsilon/2}$,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}\left(\frac{2\pi k}{n}, u\right)} du \le \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{E_n^k} \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)}dsdu + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^4 |1 - |\cos(n\alpha)||^2}\right),$$

and in particular

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}\left(\frac{2\pi k}{n}, u\right)} du \times \mathbb{1}_{E_n^k \subset J_{\varepsilon/2}} &\le \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{E_n^k} \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)}\mathbb{1}_{s \in J_{\varepsilon/2}}dsdu \\ &+ O\left(\frac{1}{n\varepsilon^4 |1 - |\cos(n\alpha)||^2}\right). \end{aligned}$$

Injecting this last estimate in Equation (3.11) and making the sum over $0 \le k \le n-1$, we get

$$\int_{J_\varepsilon} \sqrt{Q_n(t)}dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)}\mathbb{1}_{s \in J_{\varepsilon/2}}dsdu + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^4 |1 - |\cos(n\alpha)||^2}\right).$$

□

Lemma 3.3.8. *Uniformly in n, and for all $0 < \eta < 1$, we have*

$$\left| \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)|^2}\mathbb{1}_{s \in J_\varepsilon}dsdu - \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + |g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)|^2}dsdu \right| = O\left(\varepsilon^{\frac{\eta}{1+\eta}}\right).$$

Proof. It results from applying Hölder inequality with $p = 1 + \eta$ and $q = 1 + 1/\eta$ and using Lemma 3.3.2. □

Combining the estimate (3.4) and Lemmas 3.3.7 and 3.3.8, we conclude that for all $\varepsilon > 0$ and n large enough such that $n\varepsilon >> 1$ then

$$\left| \frac{4\pi}{n}\int_{J_\varepsilon} \sqrt{I_n(t)}dt - \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{1 + g_{n\alpha}^{\alpha}(s,u)^2}dsdu \right| = O\left(\varepsilon^{\frac{\eta}{1+\eta}}\right) + O\left(\frac{1}{n\varepsilon^5 |1 - |\cos(n\alpha)||^2}\right).$$

3.3.2 Near the atoms and conclusion

We are left to estimate the number of real zeros of f_n in the neighborhood of the atoms $\pm\alpha$ of the spectral measure μ. If $\varepsilon = \varepsilon_n$ is of the form $\varepsilon_n = n^{-\beta}$ with $0 < \beta < 1/2$, Proposition 3.3.1 of [Pir20] indeed show that

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n, J_{\varepsilon_n}^c\right)\right]}{n} = O\left(\varepsilon_n\right). \tag{3.12}$$

Therefore, we can conclude that, as soon as ε_n is chosen of the form $n^{-\beta}$ for $0 < \beta < 1/5$, we have

$$\left|\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n, [0, 2\pi]\right)\right]}{n} - \ell^\alpha(n\alpha \bmod \pi)\right| = O\left(\varepsilon_n^{\frac{\eta}{1+\eta}}\right) + O\left(\frac{1}{n\varepsilon_n^5|1-|\cos(n\alpha)||^2}\right), \tag{3.13}$$

which finishes the proof of Theorem 3.1.1. Then Corollary 3.1.1 follows because uniformly in $x \in S\backslash\{0\}$, if $n\alpha \bmod \pi = x$, then $1 - |\cos(n\alpha)| = 1 - |\cos(x)|$ is bounded away from zero. In the last case where $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, Corollary 3.1.2 follows from Theorem 3.1.1 and the regularity of ℓ^α established in Lemma 3.3.3.

From Lemmas 3.3.6, 3.3.5 and the estimate (3.13) as $\alpha \to 0$ and $n\alpha \mod \pi \to 0$, remark that we get the same limit (3.1) as in Proposition 3.1.1. In the same manner, Corollary 3.1.3 follows from Corollary 3.1.2, Lemmas 3.3.5 and 3.3.6 for $\ell \in (\sqrt{2}, 2)$ and from Proposition 3.1.1 for $\ell = 2$.

Chapter 4

The Gaussian case with a general spectral measure

This chapter is based on the article [APP21a], submitted for publication.

4.1 Introduction and statements of the results

4.1.1 Introduction

This article focuses on the study of the number of real zeros of random trigonometric polynomials which is the object of a vast literature. In this framework, of particular interest is the question of the universality of the large degree asymptotics of this number of zeros, which generally consists in determining whether the latter asymptotic behavior depends or not on the specific choice of the joint distribution of the random coefficients.

The case of random trigonometric polynomials whose coefficients are independent and identically distributed has been studied intensively. In this setting, the asymptotics of the expected number of real zeros is known to display an universal behavior, at both local and global scales, as established in a serie of papers, see for example [AP15, IKM16, Fla17, DNV18] and recently [NV18] which provides the most general conditions.

Though it is a rather natural extension, much less is known in the case of random coefficients that are correlated. Most of the techniques developed in the aforementioned references seems hard to adapt to the context of correlated coefficients, roughly because one cannot exploit anymore the independence to provide accurate enough estimates of characteristic functions, which enable one to deal with anti-concentration problems that naturally arise in this context. Nevertheless, in the case of Gaussian coefficients, one can bypass these difficulties which explain that the content of the available literature for dependent coefficients is so far restricted to Gaussianity.

Let us detail our model. We consider a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on which we define two independent stationary Gaussian processes $(a_k)_{k\geq 1}$ and $(b_k)_{k\geq 1}$, where the variables

a_k and b_k are centered with unit variance and with covariance function

$$\rho(|k-\ell|) := \mathbb{E}[a_k a_\ell] = \mathbb{E}[b_k b_\ell] \ , \quad k, \ell \geq 1.$$

By Bochner–Herglotz Theorem, the sequence ρ is then associated to a so-called spectral measure μ_ρ and since ρ is real and $\rho(0) = 1$, the measure μ_ρ is in fact a symmetric probability measure on $[-\pi, \pi]$. We then set f_n the associated random trigonometric polynomial

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{4.1}$$

The number of real zeros of a function f in a given interval $[a, b]$ will be denoted by

$$\mathcal{N}(f, [a, b]) := \# \{t \in [a, b], f(t) = 0\}.$$

The asymptotics of the number of real zeros in the case of Gaussian independent coefficients, i.e. the case where $\rho(k) = \delta_0(k)$ and $\mu_\rho(dx) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(x)dx$, was first studied by Dunnage in [Dun66]. The analogue question for Gaussian dependent coefficients was first investigated in [Sam78, RS84] where the coefficients $(a_k)_{k\geq 1}$ followed a stationary Gaussian process with both constant correlation i.e. $\rho(k) = r$ with $|r| < 1$ for $k \neq 0$, and geometric correlation i.e. $\rho(k) = r^k$ with $|r| < 1$. Although these two types of correlations are of seemingly very different nature, it was shown that the asymptotic behavior of the expected number of roots coincides with the one of i.i.d. Gaussian coefficients. In the reference [ADP19], the authors examined the case where the spectral measure admits a continuous density on $(0, 2\pi)$ which is bounded from below on $[0, 2\pi]$ for which the asymptotic also coincides with the one of i.i.d. Gaussian coefficients:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{4.2}$$

Recently in [Pau20], the author studied the case where the random coefficients still form a stationary Gaussian process, but the associated spectral measure in purely singular, namely $\rho(k) = \cos(k\alpha)$ with $\alpha \notin \mathbb{Q}$ such that $\mu_\rho = \frac{\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}}{2}$. He then established that the normalized expected number of zeros is not converging and in fact admits a whole continuum of possible limits, namely:

$$\mathrm{Adh}\left(\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} \,\middle|\, n \geq 1 \right) = [\sqrt{2}, 2]. \tag{4.3}$$

As $\frac{2}{\sqrt{3}} \notin [\sqrt{2}, 2]$, it then clearly appears that the asymptotic behavior of the number of real zeros is strongly related to the properties of the underlying correlation function ρ and hence the associated spectral measure μ_ρ. Conversely, some recent papers provide examples of non-stationary Gaussian entries for which the universal asymptotics (4.2) does not hold, namely by considering palindromic Gaussian entries as in [Pir21], or special pairwise block Gaussian entries in [Pir20].

Investigating further the relations between the asymptotics of the number of real zeros and the underlying spectral measure is the main object of the present article. Unless otherwise stated, throughout the whole article we shall assume that the spectral measure μ_ρ is not purely singular with respect to the Lebesgue measure and we will denote by ψ_ρ its absolutely continuous component, i.e. the Radon–Nikodym derivative $\psi_\rho := d\mu_\rho/d\lambda \neq 0$. In the case where the measure μ_ρ is purely absolutely continuous and provided that the spectral density ψ_ρ is $\mathcal{C}^1$ with a Hölder derivative, we establish that $n^{-1}\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]$ converges as n goes to infinity, and quite surprisingly that the limit is a linear function of $\lambda\left(\{\psi_\rho = 0\}\right)$, the Lebesgue measure of the nodal set associated with the spectral density, see Theorems 4.1.1 and 4.1.2 below. In particular, this limit does not depend on the shape of the spectral density and neither on the speed of decay of the correlation ρ. Otherwise, in the case where $\log(\psi_\rho)$ is integrable, whatever the singular part of μ_ρ is, we establish that the universal asymptotics (4.2) holds, see Theorem 4.1.3 below. This can be seen as a strong improvement of the assumptions required in [ADP19] since (i) we do not require anymore any assumption of continuity of ψ_ρ, (ii) we do not require that it is bounded from below but instead that it is logarithmically integrable and (iii) we may deal with spectral measures having possibly a non zero singular part. Moreover, with some additional regularity and integrability assumptions on the spectral density, we reinforce the convergence in an almost sure sense, see Theorem 4.1.4.

Contrarily to the main methods used in the previously quoted literature, which usually rely crucially on the celebrated Kac–Rice formula, our approach to get the aforementioned extensions of the main result of [ADP19] uses a significantly different strategy. Namely we exploit the following equality

$$\frac{\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{N}\left(f_n, \left[x, x+\frac{2\pi}{n}\right]\right) dx,$$

which enables one to reinterpret the quantity of interest as the expected number of roots of $g_n(u) = f_n\left(X + \frac{u}{n}\right)$ in the set $[0,2\pi]$ and where the expectation is computed through and independent and uniformly distributed random variable X on $[0,2\pi]$. Bearing this in mind, we then study the limit in distribution of $g_n(\cdot)$ in the functional space $\mathcal{C}^1\left([0,2\pi]\right)$ endowed with the $\mathcal{C}^1$ topology. This allows to deal with the expected number of roots of the limit process which in turn leads to the universal asymptotics (4.2). Quite remarkably, it seems that this strategy provides more precise statements than the one obtained via the Kac–Rice strategy as bounding the integrand in the Kac–Rice integral usually imposes non necessary assumptions on the spectral density ψ_ρ which are roughly due to the presence of some denominator that must be bounded from below in the estimates. We stress that this approach is inspired by Theorem 3.1.1 of Salem and Zygmund in [SZ54] and by the point of view and strategy adopted in [AP19] in the case of independent coefficients.

4.1.2 Main results and comments

The first main result of the article exhibits a remarkable interplay between the Lebesgue measure of the vanishing locus of the spectral density ψ_ρ and the asymptotics of the number of real zeros. In particular, if ψ_ρ vanishes on a set of positive Lebesgue measure, the asymptotics of the normalized expected number of real zeros is not universal, i.e. differs from the one obtained in the independent case.

Theorem 4.1.1. *Suppose that $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ where the spectral density ψ_ρ is $\mathcal{C}^1$ with Hölder derivative on an open set of full Lebesgue measure, then we have*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} = \frac{\lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2\pi - \lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{3}}.$$

With some mild assumptions on the topology of the nodal set $\{\psi_\rho = 0\}$, one can moreover relax the above assumptions on the regularity of ψ_ρ.

Theorem 4.1.2. *Suppose that $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ where the spectral density ψ_ρ is piecewise continuous and that its nodal set can be decomposed as a finite union of intervals and points*

$$\{\psi_\rho = 0\} = \bigcup_{i=1}^{p}[a_i,b_i] \cup \bigcup_{j=1}^{q}\{c_j\}.$$

Then, the same asymptotics holds

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} = \frac{\lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2\pi - \lambda(\{\psi_\rho = 0\})}{\pi\sqrt{3}}.$$

Remark 4.1.1. *As mentioned above, these two first results show that the asymptotics of the number of real zeros do not particularly depend on the decay of the correlation function ρ, namely*

- *under the hypotheses of Theorem 4.1.1 or 4.1.2, choosing the density ψ_ρ as a smooth function with a compact support strictly included in $(0, 2\pi)$, the associated correlation function ρ then decays arbitrarily fast at infinity and the asymptotics of the number of zeros is still non-universal since it differs from the one given by Equation* (4.2).
- *in the opposite case, as detailed in the discussion after Theorem 1 in [ADP19], there exists some correlation function ρ with arbitrarily slow decay at infinity such that the nodal asymptotics is universal.*

It is also remarkable that the large degree asymptotics of the expected number of zeros depends on ψ_ρ only through the Lebesgue measure of the its nodal set. Two spectral densities with different shapes and possibly disjoint supports will yield to the same asymptotics as soon as the Lebesgue measure of their zero sets coincide.

Choosing in particular the spectral density ψ_ρ of the form $\psi_\rho(x) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ with $a \in (0, \pi)$, the last Theorem 4.1.2 yields the following corollary, which in fact can be seen as a first step towards the more general situation covered by Theorems 4.1.1 or 4.1.2.

Corollary 4.1.1. *Suppose that $\rho(k) = \sin(ka)/ka$ i.e. $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ with $\psi_\rho(x) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ with $a \in (0, \pi)$, then we have*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \frac{2\pi - 2a}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2a}{\pi\sqrt{3}}.$$

Remark 4.1.2. *The above corollary entails in particular that for any $\ell \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\right)$, there exists a spectral density ψ_ρ such that*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} = \ell.$$

Hence in the case of a spectral measure admitting a spectral density with respect to the Lebesgue measure, the expected number of real zeros has a whole spectrum of possible values. This has to be compared with the purely discrete case studied in [Pau20], where as recalled above, it is shown that, choosing μ_ρ as purely atomic of the form $\mu_\rho = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{-\alpha})$, with $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$ also yields non-universal nodal asymptotics ranging this time in the interval $[\sqrt{2}, 2]$.

Remark 4.1.3. *Note also that, a direct corollary of the proof of Theorem 4.1.1 is that if ψ_ρ is $\mathcal{C}^1$ with Hölder derivative on an open set of full Lebesgue measure and that $\lambda(\{\psi_\rho = 0\}) > 0$, then we have*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])]}{n} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

This lower bound goes in the direction of the conjecture raised in [Pir20], asserting that the universal limit $2/\sqrt{3}$ is the minimum possible value for the asymptotics of the expected number of real zeros when dealing with Gaussian trigonometric polynomials with dependent coefficients.

The second main result of this article consists in relaxing the hypotheses of [ADP19] on the spectral density in order to obtain a universal asymptotics for the expected number of real zeros. Recall that in the latter reference, the spectral density ψ_ρ was assumed to be continuous and lower bounded by a positive constant. We establish here that the expected asymptotics is universal as soon as ψ_ρ satisfies a $\log-$integrability condition, and with no condition on the singular component μ_ρ^s.

Theorem 4.1.3. *Suppose that $\mu_\rho(dx) = \mu_\rho^s + \psi_\rho(x)dx$ and assume that there exists $\eta \in (0, 1)$ such that*

$$\log(\psi_\rho) \in L^{1+\eta}([0, 2\pi]),$$

then

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Remark 4.1.4. *Such a* $\log -$*integrability condition is rather natural if we keep in mind that the limiting case where* $\eta = 0$ *corresponds to the fact that the stationary Gaussian sequences* $(a_k)_{k\geq 0}$ *and* $(b_k)_{k\geq 0}$ *are "purely non-deterministic", see e.g. Chapter 1, p. 9 of [Wil07] and Section 2.1 of [HNTX15], or equivalently, that these sequences have "finite entropy", see e.g. [Iha00].*

In the case of an absolutely continuous spectral measure, with additional assumptions of regularity and integrability on the spectral density ψ_ρ, the previous result can be even strengthened in an almost-sure asymptotics.

Theorem 4.1.4. *Assume that* μ_ρ *is purely absolutely continuous, i.e.* $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ *and that*

A.1 *there exists* $\alpha > 0$ *such that* ψ_ρ *satisfies a Besov regularity property of order* α, *i.e.*

$$\text{for } \delta > 0, \ \sup_{|h|\leq\delta} \|\psi_\rho(\cdot + h) + \psi_\rho(\cdot - h) - 2\psi_\rho(\cdot)\|_{L^1([0,2\pi])} = O(\delta^\alpha),$$

A.2 *there exists* $\gamma > 0$ *such that*

$$\frac{1}{\psi_\rho(X)} \in L^\gamma([0, 2\pi]).$$

Then, $\mathbb{P}$*-almost surely, we have*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{4.4}$$

Remark 4.1.5. *Note that the Besov-type Assumption A.1 is naturally satisfied if the spectral density* ψ_ρ *is Hölder continuous, and that Assumption A.2 on the existence of a negative moment implies the log-integrability condition required in the above Theorem 4.1.3. Note moreover that these two hypotheses are weaker than the ones made [ADP19]. In particular, Theorem 4.1.4 is valid in the emblematic case of Gaussian coefficients that are increments of fractional Brownian motion of any Hurst parameter. Indeed, in this last case, the spectral density in smooth except at zero and is lower bounded by a positive constant, so that it trivially admits negative moments.*

The proofs of Theorems 4.1.3 and 4.1.4 above are based on Central Limit Theorems of Salem–Zygmund type, which extend the recent results of [AP19] obtained in the independent case to the setting of dependent coefficients. Indeed, in the spirit of Theorem 3.1.1 of [SZ54], almost surely in the random coefficients, when evaluated at a uniform and independent random point X, the sequence $f_n(X)$ converges in distribution to a mixture of Gaussian variables. Note that in the two following statements, no assumption is required on the spectral density.

Theorem 4.1.5. *$\mathbb{P}$-almost surely, for all $t \in \mathbb{R}$, we have*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}\times 2\pi\psi_\rho(x)}dx = \mathbb{E}_{X,N}\left[e^{it\sqrt{2\pi\psi_\rho(X)}N}\right],$$

where N is a standard Gaussian variable, independent of X. In other words, $\mathbb{P}$-almost surely, the sequence of random variables $f_n(X)$ converges in distribution under $\mathbb{P}_X$ towards $\sqrt{2\pi\psi_\rho(X)}N$.

Remark 4.1.6. *We first observe that, in the independent case where $\rho(k) = \delta_0(k)$ i.e. $\psi_\rho \equiv 1/2\pi$ on $[-\pi,\pi]$, we recover the Central limit Theorem by Salem–Zygmund with a standard Gaussian limit distribution. Note that the same central asymptotics was recently observed in another model of dependent coefficients obtained via arithmetic functions, see [BNR20]. Going back to our model, in the non-independent case, i.e. if ψ_ρ in non-constant, then the limit in distribution in Theorem 4.1.5 is not Gaussian anymore but rather a continuous mixture of Gaussian distributions and thus provides a natural instance where Salem–Zygmund central convergence fails. Finally, note that if $\psi_\rho \equiv 0$, i.e. μ_ρ is purely singular, the above limit is trivial so that another renormalization is needed.*

This last result is in fact the consequence of the following more general functional Central Limit Theorem which is the analogue of Theorem 3 in [AP19]. As above, no assumption is required here on the spectral measure μ_ρ.

Theorem 4.1.6. *$\mathbb{P}$-almost surely, the localized process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]} := \left(f_n\left(X+\frac{t}{n}\right)\right)_{t\in[0,2\pi]}$ converges in distribution under $\mathbb{P}_X$ for the $\mathcal{C}^1$ topology to a limit process $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ given by*

$$g_\infty := \sqrt{2\pi\psi_\rho(X)}N,$$

where $N = (N_t)_{t\in[0,2\pi]}$ is the standard Gaussian process with $\sin_c$ *covariance function, independent of the uniform variable X.*

The plan of the article is the following. In the next Section 4.2, after recalling some basics on trigonometric kernels and Kac–Rice formula, we give the detailed proofs of Theorem 4.1.1 and 4.1.2. Then, Section 4.3 is devoted to the proofs of both Theorems 4.1.5 and 4.1.6, i.e. the Central limit Theorems à la Salem–Zygmund. Finally, in the last Section 4.4, we detail how these last theorems allow to deduce the universality of the nodal asymptotics, first under expectation and then in an almost sure sense. For the readability of the paper, some of the technical estimates and lemmas have been postponed in Appendix in Section 4.5.

4.2 Nodal asymptotics with a vanishing spectral density

The object of this section is to give the detailed proof of Theorems 4.1.1 and 4.1.2. In order to do so, let us first recall some basics on trigonometric kernels and the celebrated Kac–Rice formula, which allows to express the expected number of zeros as an explicit functional of the correlation functions.

4.2.1 Preliminaries on trigonometric kernels and Kac–Rice formula

Recall that ρ is the covariance function of the independent stationary sequences (a_k) and (b_k), i.e. $\mathbb{E}[a_k a_l] = \mathbb{E}[b_k b_l] = \rho(k-l)$ and that μ_ρ is the associated symmetric spectral probability measure via Bochner–Herglotz Theorem, i.e.

$$\rho(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\mu_\rho(dx).$$

We adopt the following normalization conventions, if f and g bounded $2\pi-$periodic functions, $k \in \mathbb{Z}$

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)dx,$$

so that

$$\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

The correlation functions associated to our model can be expressed in terms of trigonometric kernels. Namely, if the function f_n is given by Equation (4.1), then we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f_n^2(x)\right] &= \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}\left[a_k a_l\right]\cos(kx)\cos(lx) + \mathbb{E}\left[b_k b_l\right]\sin(kx)\sin(lx) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \rho(k-l)\cos((k-l)x) = \sum_{r=-n}^{n}\left(1-\frac{|r|}{n}\right)\rho(r)e^{irx} = 2\pi\, K_n * \mu_\rho(x),\end{aligned} \tag{4.5}$$

where K_n denotes the celebrated Fejer Kernel given by

$$K_n(x) := \sum_{r=-n}^{n}\left(1-\frac{|r|}{n}\right)e^{irx} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2.$$

Similarly, setting $\alpha_n := \frac{6}{(n+1)(2n+1)} \sim \frac{3}{n^2}$, we have

$$\mathbb{E}\left[f_n'(x)^2\right] = \frac{2\pi}{\alpha_n} L_n * \mu_\rho(x), \tag{4.6}$$

where

$$L_n(x) := \frac{\alpha_n}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} k e^{ikx}\right|^2 = \frac{\alpha_n}{n}\sum_{k,\ell=1}^{n} k\ell\cos((k-\ell)x) = \frac{\alpha_n}{n}\frac{(n+1)^2}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\left|1-\frac{(1-e^{i(n+1)x})e^{-inx}}{(n+1)(1-e^{ix})}\right|^2.$$

The functions K_n and L_n satisfy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} L_n(x)dx = 1.$$

Finally we will also have

$$\mathbb{E}\left[f_n(x)f_n'(x)\right] = \pi\, K_n' * \mu_\rho(x), \tag{4.7}$$

with

$$K_n'(x) = \frac{2}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)\left(\frac{n\cos(nx/2)}{2\sin(x/2)} - \frac{\sin(nx/2)\cos(x/2)}{2\sin(x/2)^2}\right).$$

Both functions K_n and L_n are in fact good regularizing kernels as shown in Lemma 1 of [ADP19]. In the sequel, we will make use of the following uniform estimates.

Lemma 4.2.1. *The two kernels K_n, L_n are non-negative and even, the derivative K_n' is odd and these three functions satisfy the following upper bounds*

1. *For all integer $n \geq 1$*

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} K_n(x) \leq n, \qquad \sup_{x\in[-\pi,\pi]} L_n(x) \leq n, \qquad \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \frac{|K_n'(x)|}{n} \leq n.$$

2. *There exists a constant $C > 0$ such that uniformly in $x \in [-\pi, \pi]$*

$$K_n(x) \leq \frac{C}{nx^2}, \quad L_n(x) \leq C\left(\frac{1}{nx^2} + \frac{1}{n^2|x|^3} + \frac{1}{n^3x^4}\right), \quad \frac{|K_n'(x)|}{n} \leq C\left(\frac{1}{nx^2} + \frac{1}{n^2|x|^3}\right).$$

Proof. From the expression of the functions in terms complex exponentials, we have directly

$$K_n(x) \leq K_n(0) = n, \quad L_n(x) \leq L_n(0) = \frac{6n(n+1)}{4(2n+1)} \leq n,$$

and since $u(1-u) \leq 1/4$ for $u \in [0,1]$, in the same way we get

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |K_n'(x)| \leq 2n\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{n}\left(1 - \frac{r}{n}\right) \leq n^2/2 \leq n^2.$$

By concavity of the function $x \mapsto \sin(x)$ on $[0, \pi/2]$, we have $|\sin(x/2)| \geq \frac{|x|}{\pi}$ for $x \in [-\pi, \pi]$, and injecting this estimates in the denominators of K_n, L_n and K_n', we get uniformly in $x \in [-\pi, \pi]$

$$K_n(x) \leq \frac{\pi^2}{nx^2}, \quad L_n(x) \leq \frac{\alpha_n}{n}\frac{\pi^2(n+1)^2}{4x^2}\left(1 + \frac{\pi}{n|x|}\right)^2, \quad \frac{|K_n'(x)|}{n} \leq \frac{\pi^2}{nx^2} + \frac{\pi^3}{n^2|x|^3}.$$

□

Suppose that the spectral measure μ_ρ admits the decomposition $\mu_\rho = \mu_\rho^s + \psi_\rho(x)dx$, where μ_ρ^s is its singular part and ψ_ρ is the density component, with the convention that $\psi_\rho = 0$ if μ_ρ is purely singular. From the above estimates on the trigonometric kernels, one can then deduce the following Fejér–Lebesgue type asymptotics.

Lemma 4.2.2. *For Lebesgue almost every $x \in [-\pi, \pi]$,*

$$\lim_{n\to+\infty} K_n * \mu_\rho(x) = \psi_\rho(x), \quad \lim_{n\to+\infty} L_n * \mu_\rho(x) = \psi_\rho(x), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} K_n' * \mu_\rho(x) = 0.$$

Proof. The first estimates is precisely the celebrated Fejér–Lebesgue Lemma, see e.g. Theorem 8.1, page 105 of [Zyg02]. For the sake of self-containedness, let us detail the proof for the two other kernels L_n and K_n'/n. If we set

$$\varphi_x(t) := \mu_\rho([0, x+t]) - \mu_\rho([0, x-t]) - 2t\psi_\rho(x),$$

then $t \mapsto \phi_x(t)$ is of bounded variation and for $\varepsilon > 0$, we denote by $\Phi_x(\varepsilon)$ its total variation on $[-\varepsilon, \varepsilon]$, namely

$$\Phi_x(\varepsilon) := \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |d\varphi_x(u)|.$$

By Theorem 8.4, p 106 of [Zyg02], Lebesgue almost all point x in $[-\pi, \pi]$ belong to the set

$$E := \{x \in [-\pi, \pi],\ \Phi_x(\varepsilon) = o(\varepsilon) \text{ as } \varepsilon \text{ goes to zero}\}.$$

From now on, we fix $x \in E$. Since $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} L_n(t)dt = 1$, we have the representation:

$$L_n * \mu_\rho(x) - \psi_\rho(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_n(t) d\varphi_x(t) \right). \tag{4.8}$$

By the first point of Lemma 4.2.1, we have $L_n(t) \leq n$ uniformly so that as n goes to infinity

$$\left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} L_n(t) d\phi_x(t) \right| \leq n \times \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |d\varphi_x(t)| = n\,\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right) = o(1). \tag{4.9}$$

Moreover, by the second point of Lemma 4.2.1, we also have

$$\left| \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} L_n(t) d\varphi_x(t) \right| \leq C \left(\int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{|d\varphi_x(t)|}{nt^2} + \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{|d\varphi_x(t)|}{n^2 t^3} + \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{|d\varphi_x(t)|}{n^3 t^4} \right). \tag{4.10}$$

Then, integrating by parts the first term on the right hand side of (4.10), we obtain

$$\int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{|d\varphi_x(t)|}{nt^2} = \left[\Phi_x(t) \times \frac{1}{nt^2} \right]_{1/n}^{\pi} + 2 \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{\Phi_x(t)dt}{nt^3}.$$

On the one hand, since $x \in E$, as n goes to infinity, we have

$$\left[\Phi_x(t) \times \frac{1}{nt^2} \right]_{1/n}^{\pi} = O\left(\frac{1}{n}\right) + n\,\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right) = o(1),$$

and on the other hand, for all $\delta > 0$ and n large enough, we have

$$\int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{\Phi_x(t)dt}{nt^3} = \underbrace{\int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \delta} \frac{\Phi_x(t)}{t} \times \frac{dt}{nt^2}}_{o(\delta) \times O(1)} + \underbrace{\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{\Phi_x(t)}{t} \times \frac{dt}{nt^2}}_{=O\left(\frac{1}{n\delta^2}\right)},$$

so that letting first n go to infinity and then δ to zero, we get

$$\int_{\frac{1}{n}\leq|t|\leq\pi} \frac{|d\varphi_x(t)|}{nt^2} = o(1).$$

Proceeding in the exact same way for the two other terms on the right hand side of (4.10), we obtain that if $x \in E$, as n goes to infinity

$$\int_{\frac{1}{n}\leq|t|\leq\pi} \frac{|d\varphi_x(t)|}{n^2t^3} = o(1), \qquad \int_{\frac{1}{n}\leq|t|\leq\pi} \frac{|d\varphi_x(t)|}{n^3t^4} = o(1).$$

As a result, from Equations (4.8), (4.9) and (4.10), we get indeed that $L_n * \mu_\rho(x) - \psi_\rho(x)$ goes to zero as n goes to infinity. The proof for the kernel K_n' is very similar. Since K_n' is odd, we have a similar representation

$$\frac{1}{n}K_n' * \mu_\rho(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}K_n'(t)d\varphi_x(t) \right).$$

and one can conclude as above using the uniform estimates for K_n' given by Lemma 4.2.1. $\square$

In the case where the measure μ_ρ has a singular component, it is not possible to give general quantitative estimates for the convergences in Lemma 4.2.2. On the opposite case, if μ_ρ is absolutely continuous $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ and ψ_ρ is regular enough, then there exists simple quantitative bounds. For $\alpha > 0$, we denote by $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ the set of $\mathcal{C}^1$ functions ψ such that the derivative ψ' is $\alpha-$Hölder with Hölder norm $[\psi']_\alpha$

$$[\psi']_\alpha := \sup_{|x-y|>0} \frac{|\psi'(x) - \psi'(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty.$$

Lemma 4.2.3. *Suppose that $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ with ψ_ρ of class $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ with $\alpha > 0$, then uniformly in x*

$$K_n * \mu_\rho(x) - \psi_\rho(x) = O(1/n), \quad L_n * \mu_\rho(x) - \psi_\rho(x) = O(1/n).$$

Proof. Let us note that for any $x, y \in [-\pi, \pi]$, by the mean value Theorem, there exists c between x and $x - y$ such that $\psi_\rho(x-y) - \psi_\rho(x) = -y\psi_\rho'(c)$. Since ψ_ρ' is a $\alpha-$Hölder function, we have moreover $|\psi_\rho'(c) - \psi_\rho'(x)| \leq [\psi']_\alpha|c-x|^\alpha \leq [\psi']_\alpha|y|^\alpha$, so that

$$|\psi_\rho(x-y) - \psi_\rho(x) + y\psi_\rho'(x)| \leq [\psi']_\alpha|y|^{1+\alpha}.$$

Therefore, integrating against the even kernel K_n, we thus get that

$$|K_n * \mu_\rho(x) - \psi_\rho(x)| \leq \frac{[\psi']_\alpha}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)|y|^{1+\alpha}dy.$$

Now, using the uniform bounds of the second point in Lemma 4.2.1, we get

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)|y|^{1+\alpha}dy \leq \frac{C}{n}\int_{-\pi}^{\pi}|y|^{\alpha-1}dy = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

In the same way, since L_n is also even, we have

$$|L_n * \mu_\rho(x) - \psi_\rho(x)| \leq \frac{[\psi']_\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_n(y)|y|^{1+\alpha} dy,$$

and by Lemma 4.2.1 again, we get

$$\int_{-\pi}^{\pi} L_n(y)|y|^{1+\alpha} dy = \int_{0 \leq |y| \leq 1/n} L_n(y)|y|^{1+\alpha} dy + \int_{|y|>1/n} L_n(y)|y|^{1+\alpha} dy$$

with

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq |y| \leq 1/n} L_n(y)|y|^{1+\alpha} dy &\leq n \int_{0 \leq |y| \leq 1/n} |y|^{1+\alpha} dy = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right), \\ \int_{|y|>1/n} L_n(y)|y|^{1+\alpha} dy &\leq \int_{|y|>1/n} |y|^{1+\alpha} \left(\frac{1}{n|y|^2} + \frac{1}{n^2|y|^3} + \frac{1}{n^3|y|^4}\right) dy = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.2.4. *Suppose that the spectral measure $\mu_\rho = \mu_\rho^s + \psi_\rho(x)dx$ is not purely singular, i.e. ψ_ρ is positive on a set of positive Lebesgue measure, then there exists a positive constant C such that, uniformly in $x \in [-\pi, \pi]$, for n large enough*

$$K_n * \mu_\rho(x) \geq K_n * \psi_\rho(x) \geq C/n.$$

Proof. Since the Fejér kernel K_n is non-negative, we have

$$K_n * \mu_\rho(x) \geq K_n * \psi_\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\psi_\rho(x-t) dt.$$

Now, we can rewrite K_n as

$$K_n(t) = \frac{1}{2n} \times \frac{1-\cos(nt)}{\sin^2(t/2)}$$

so that, since $\sin(t/2) \leq 1$, we get

$$K_n * \mu_\rho(x) \geq \frac{1}{2n}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_\rho(t) dt - \frac{1}{2n}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\psi_\rho(x-t) dt.$$

Then, since

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\psi_\rho(x-t) dt = \cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\psi_\rho(t) dt + \sin(nx) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\psi_\rho(t) dt,$$

by Riemann–Lebesgue Lemma, we deduce that uniformly in x, we have as n goes to infinity

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\psi_\rho(x-t) dt\right| \leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\psi_\rho(t) dt\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\psi_\rho(t) dt\right| = o(1).$$

Setting $C := \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_\rho(t)dt > 0$, we thus obtain that

$$K_n * \psi_\rho(x) \geq \frac{C}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

hence the result. □

In fact we have the more general lower bound.

Lemma 4.2.5. *Uniformly in $x \in [-\pi, \pi]$, and for any integer $n \geq 1$*

$$K_n * \mu_\rho(x) \geq \frac{1}{4\pi n}\left(1 - \rho(n)\cos(nx)\right).$$

Proof. As above, we use the fact that uniformly in t

$$K_n(t) \geq \frac{1}{2n} \times (1 - \cos(nt))$$

to deduce that

$$\begin{aligned}
K_n * \mu_\rho(x) &\geq \frac{1}{2n}\frac{1}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \cos(n(t-x))\right) d\mu_\rho(t) \\
&= \frac{1}{2n}\frac{1}{2\pi}\left(1 - \cos(nx)\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)d\mu_\rho(t) - \sin(nx)\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)d\mu_\rho(t)\right) \\
&= \frac{1}{2n}\frac{1}{2\pi}\left(1 - \cos(nx)\rho(n)\right).
\end{aligned}$$

□

We now recall the celebrated Kac–Rice formula which, in the present context, allows to express the expected number real zeros of f_n as a simple functional of the covariance function of the Gaussian vector $(f_n(x), f_n'(x))$.

Proposition 4.2.1. *Suppose that the spectral measure $\mu_\rho = \mu_\rho^s + \psi_\rho(x)dx$ is not purely singular, i.e. ψ_ρ is positive on a set of positive Lebesgue measure, then for any $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n, [a,b]\right)\right]}{n} &= \frac{1}{\pi}\int_a^b \sqrt{\frac{\mathbb{E}[f_n'^{\,2}(x)]}{n^2\mathbb{E}[f_n^2(x)]} - \left(\frac{\mathbb{E}[f_n(x)f_n'(x)]}{n\mathbb{E}[f_n^2(x)]}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_a^b \sqrt{\frac{1}{n^2\alpha_n}\frac{L_n * \mu_\rho(x)}{K_n * \mu_\rho(x)} - \left(\frac{K_n' * \mu_\rho(x)}{2nK_n * \mu_\rho(x)}\right)^2}\,dx.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Proof. In the Gaussian context, Kac–Rice formula holds as soon as the function $x \mapsto f_n(x)$ is regular enough and the variables $(f_n(x))_{x\in[-\pi,\pi]}$ are non-degenerate, see e.g. [AW09]. Here, we observe that $f_n(\cdot)$ has $\mathcal{C}^1$ paths and besides, in virtue of Lemma 4.2.4, for every $x \in [-\pi, \pi]$, we have the lower bound on the variance $\mathbb{E}[f_n^2(x)] = 2\pi K_n * \mu_\rho(x) > C/n$, hence the validity of the formula. The equality between the two integrals is due to the expression of the covariance functions in terms of convolutions, see Equations (4.5), (4.6), (4.7) above. □

Corollary 4.2.1. *Suppose that the spectral measure μ_ρ is such that the spectral density ψ_ρ is positive almost everywhere on an interval $[a, b]$, then*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}\left(f_n, [a,b]\right)\right]}{n} \geq \frac{b-a}{\pi\sqrt{3}}.$$

Proof. The result is an immediate consequence of the representation formula (4.11), associated with the Fejér–Lebesgue type estimates of Lemma 4.2.2. Indeed, under the assumption that $\psi_\rho(x) > 0$ for almost all $x \in [a, b]$, as n goes to infinity we have

$$\frac{1}{n^2\alpha_n} \to \frac{1}{3}, \quad \frac{L_n * \mu_\rho(x)}{K_n * \mu_\rho(x)} \to \frac{\psi_\rho(x)}{\psi_\rho(x)} = 1, \quad \frac{K_n' * \mu_\rho(x)}{nK_n * \mu_\rho(x)} \to 0,$$

and one concludes by using Fatou Lemma in Equation (4.11). □

Remark 4.2.1. *As the lower bound mentioned in Remark 4.1.3 above, the last Corollary 4.2.1 is a local estimate which goes in the direction of the conjecture raised by Pirhadi in [Pir20], on the minimal value of the expected number of zeros of Gaussian trigonometric polynomials with dependent coefficients. Note that the result is independent of the singular component of the spectral measure.*

4.2.2 Towards a non-universal asymptotics

We can now give the detailed proofs of both Theorems 4.1.1 and 4.1.2 stated in the introduction of the article.

An illustrating example

In order to highlight the main ideas behind the proof, let us first establish Corollary 4.1.1, i.e. let us examine as a preliminary step the specific case where $\rho(k) = \sin(ka)/ka$ i.e. $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ with $\psi_\rho(x) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ with $a \in (0, \pi)$.

The proof relies on the explicit Kac–Rice formula (4.11) and on the compilation of three separate regimes: (i) roots far from $[-a, a]$, (ii) roots inside $[-a, a]/[-\delta, \delta]$ (with $\delta << 1$) and (iii) roots at some neighborhood of $\{0, -a, a\}$ of size δ. Each of these regimes will require a different argument.

i) Far from $[-a,a]$:

Let $\delta > 0$ and $x \in [-\pi,\pi]$ such that $\mathrm{dist}(x,[-a,a]) \geq \delta$ and where the distance is modulo 2π. Since in our case, the spectral measure is given by $\mu_\rho(dt) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-a,a]}(t)dt$, Equation (4.5) reads

$$\mathbb{E}[f_n(x)^2] = 2\pi\, K_n * \mu_\rho(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} K_n(x-y)dy = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} K_n(y)dy,$$

where K_n is the Fejér kernel which can be alternatively written as

$$K_n(x) = \frac{1}{2n}\frac{1}{\sin^2(x/2)} - \frac{1}{2n}\frac{\cos(nx)}{\sin^2(x/2)}.$$

In other words,

$$n\mathbb{E}[f_n(x)^2] = \frac{1}{2} \times \left(\underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} \frac{dy}{\sin^2(y/2)}}_{\geq 1} - \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\frac{\cos(ny)}{\sin^2(y/2)} \right).$$

We shall examine the second integral and establish that it is negligible with respect to the first one (which is greater than 1) as $n \to \infty$. To do so, we must rely on the Riemann–Lebesgue Lemma. More precisely, by integration by part, since the function $y \mapsto \frac{1}{\sin^2(y/2)}$ is $\mathcal{C}^\infty$ on any interval that does not contain zero, we have

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\frac{\cos(ny)}{\sin^2(y/2)}dy = \left[\frac{\sin(ny)}{n}\frac{1}{\sin^2(y/2)}\right]_{x-a}^{x+a} + \frac{1}{n}\int_{x-a}^{x+a}\sin(ny)\frac{\cos(y/2)}{\sin^3(y/2)}dy.$$

We observe that for all $y \in [x-a,x+a]$, we have $\mathrm{dist}(y,2\pi\mathbb{Z}) \geq \mathrm{dist}(x,[-a,a]) \geq \delta$ so that $|\sin(y/2)| \geq \inf_{u\in[\delta,\pi-\delta]}|\sin(u)| \geq \frac{1}{2}\delta$. We thus obtain that

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\frac{\cos(ny)}{\sin^2(y/2)}dy = O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right).$$

In the same way, Equation (4.6) reads

$$\mathbb{E}[f_n'(x)^2] = \frac{2\pi}{\alpha_n}L_n * \mu_\rho(x) = \frac{1}{\alpha_n}\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} L_n(y)dy,$$

where we recall that

$$L_n(x) := \frac{\alpha_n}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} ke^{ikx}\right|^2 = \frac{\alpha_n}{n}\frac{(n+1)^2}{4\sin^2(x/2)}\left|1 - \frac{(1-e^{i(n+1)x})e^{-inx}}{(n+1)(1-e^{ix})}\right|^2.$$

From the above equation, by expanding the square, we have uniformly on $y \in [x-a,x+a]$ that

$$\frac{1}{\alpha_n n}L_n(y) = \frac{1}{4\sin^2(y/2)} + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^2\delta^4}\right).$$

Hence

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[f_n'(x)^2] = \frac{1}{4} \times \underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} \frac{dy}{\sin^2(y/2)}}_{\geq 1} + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^2\delta^4}\right).$$

Gathering the previous computations yields, uniformly in $x \in [-\pi, \pi]$ such that $\mathrm{dist}(x, [-a, a]) \geq \delta$

$$\frac{1}{n^2}\frac{\mathbb{E}[f_n'(x)^2]}{\mathbb{E}[f_n(x)^2]} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^2\delta^4}\right).$$

Similarly, we have the uniform estimate

$$K_n'(y) = \frac{\sin(ny)}{2\sin^2(y/2)} + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right),$$

which leads to

$$\mathbb{E}[f_n(x)f_n'(x)] = \pi\, K_n' * \mu_\rho(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} \frac{\sin(ny)}{\sin^2(y/2)}dy + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right).$$

Proceeding as before, we have the speed of convergence in Riemann–Lebesgue Lemma:

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} \frac{\sin(ny)}{\sin^2(y/2)}dy = O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right),$$

which gives

$$\frac{\mathbb{E}[f_n(x)f_n'(x)]}{n\mathbb{E}[f_n^2(x)]} = O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right).$$

Therefore, the previous estimates imply that uniformly in $x \in [-\pi, \pi]$ such that $\mathrm{dist}(x, [-a, a]) \geq \delta$, the integrand in Kac–Rice formula obeys the asymptotics

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sqrt{I_n(x)} &:= \sqrt{\frac{\mathbb{E}[f_n'(x)^2]}{n^2\mathbb{E}[f_n(x)^2]} - \left(\frac{\mathbb{E}[f_n(x)f_n'(x)]}{n\mathbb{E}[f_n(x)^2]}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^2\delta^4}\right).\end{aligned}$$

Hence, if $[\alpha, \beta]$ is a subset of $[-\pi, \pi]$ such that $\mathrm{dist}([\alpha, \beta], [-a, a]) \geq \delta$, then

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [\alpha, \beta])]}{n} = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1}{n}\sqrt{I_n(x)}dx = \frac{\beta - \alpha}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^2\delta^4}\right).$$

ii) Inside $[-a + \delta, a - \delta]/[-\delta, \delta]$:

Let us take $\delta > 0$ such that $[-a + \delta, a - \delta]/[-\delta, \delta]$ is unempty. Now, if $[\alpha, \beta] \subset [-a+\delta, a-\delta]/[-\delta, \delta]$, since K_n and L_n are regularizing trigonometric kernels, by Lemma 4.2.2, for $x \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f_n(x)^2] &= 2\pi\, K_n * \psi_\rho(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\pi\, \psi_\rho(x) = \tfrac{\pi}{a}, \\ \alpha_n\mathbb{E}[F_n'(x)^2] &= 2\pi\, L_n * \psi_\rho(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\pi\, \psi_\rho(x) = \tfrac{\pi}{a}.\end{aligned}$$

Moreover, the convergences above are uniform on $[\alpha,\beta]$. Indeed, we can write

$$K_n * \psi_\rho(x) - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[x-a,x+a]} K_n(y)dy\right)$$

so that

$$0 \leq K_n * \psi_\rho(x) - \frac{1}{2a} \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} K_n(y)dy\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{4.12}$$

and in the same way

$$0 \leq L_n * \psi_\rho(x) - \frac{1}{2a} \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} L_n(y)dy\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.13}$$

Besides, since $[\alpha,\beta] \subset [-a+\delta, a-\delta]/[-\delta,\delta]$, combining Equation (4.7) and Lemma 4.2.2 or using Lemma 2 of [ADP19], we also have

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]}\left|\frac{\mathbb{E}\left[f_n(x)f_n'(x)\right]}{n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

As a result, the integrand $\frac{1}{n}\sqrt{I_n(x)}$ in Kac–Rice formula is bounded on $[\alpha,\beta]$ by dominated convergence, we deduce that

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[\alpha,\beta])]}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{[\alpha,\beta]}\frac{1}{n}\sqrt{I_n(x)}dx = \frac{\beta-\alpha}{\pi}\frac{1}{\sqrt{3}} + o_\delta(1).$$

We stress that the above $o_\delta(1)$ possibly depends on the parameter δ but this will not be a problem in virtue of the next last step.

iii) At the neighborhood of $\{a,-a,0\}$:

The roots of the trigonometric polynomial f_n coincide with the roots in the unit circle of the algebraic polynomial

$$Q_n(x) := x^n \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(x^k - \frac{1}{x^k}\right).$$

The constant coefficient of Q_n is given by $\frac{a_n+ib_n}{2}$ and we have

$$\mathbb{E}\left[\log\left(a_n^2+b_n^2\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[\log(|a_n|)\right] = \int_{\mathbb{R}} \log(|x|)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx > -\infty.$$

Besides, the coefficient of highest degree of Q_n is also $\frac{a_n+ib_n}{2}$ and the previous computation applies in the same way. Finally the coefficient of degree $p \in \{1,\cdots,2n-1\}$ is given by

$$A_{n,p} = \frac{a_p - ib_p}{2} + \frac{a_{n-p}+ib_{n-p}}{2}.$$

Recalling that $a_k, b_k \sim \mathcal{N}(0,1)$ for every $k \geq 1$ it implies that $\max_{p \leq 2n} \mathbb{E}\left[|A_{n,p}|\right] < \infty$. Then, Q_n fulfills the assumptions of the Corollary 2.2 in [PY15] which asserts that for every $r \in]0,1[$ and every $[\alpha, \beta] \subset 0, 2\pi]$,

$$\left| \frac{\mathrm{Card}\left(Q_n^{-1}\left(\{0\}\right) \cap \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, r \leq |z| \leq \frac{1}{r}\,,\ \arg(z) \in [\alpha,\beta]\right\}\right)}{n} - \frac{\beta-\alpha}{2\pi} \right| \leq C_r \frac{\sqrt{\log(n)}}{n}.$$

It is clear that the number of roots in the angular sector $\left\{z \in \mathbb{C} \,|\, r \leq |z| \leq \frac{1}{r}\,,\ \arg(z) \in [\alpha,\beta]\right\}$ is greater than the number of roots of f_n in $[\alpha, \beta]$. As matter of fact, for some absolute constant C and for every $\delta > 0$ we then have

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [\pm a - \delta, \pm a + \delta])\right]}{n} \leq \frac{\delta}{\pi} + C\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}, \quad \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [-\delta, \delta])\right]}{n} \leq \frac{\delta}{\pi} + C\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}.$$

Conclusion:

Using additivity in Kac–Rice formula, one may write

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[-\pi,\pi])]}{n} &= \underbrace{\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[-a+\delta,-\delta])]}{n} + \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[\delta,a-\delta])]}{n}}_{\text{Step (ii)}} \\ &+ \underbrace{\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[-a-\delta,-a+\delta])]}{n} + \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[a-\delta,a+\delta])]}{n} + \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[-\delta,\delta])]}{n}}_{\text{Step (iii)}} \\ &+ \underbrace{\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[-\pi,-a-\delta])]}{n} + \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[a+\delta,\pi])}{n}]}_{\text{Step (i)}}\end{aligned}$$

Gathering the conclusions of the three above steps, letting first $n \to \infty$ and then $\delta \to 0$, we indeed obtain the asymptotics stated in Corollary 4.1.1, namely

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} = \frac{2\pi - 2a}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2a}{\pi\sqrt{3}} + o(1).$$

Continuous spectral density with a simple nodal set

In this section, we give the proof Theorem of 4.1.2. So let us consider ψ_ρ a density function which is piecewise continuous and whose support satisfies the condition below:

$$\{\psi_\rho = 0\} = \bigcup_{i=1}^{p} [a_i, b_i] \cup \bigcup_{j=1}^{q} \{c_j\}.$$

Mimicking the step (iii) of the proof of Corollary 4.1.1 in the last subsection, we can deal with some small neighborhood of the finite set $E := \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{p} \{a_i, b_i\} \cup \bigcup_{j=1}^{q} \{c_j\}$. Namely, relying again on [PY15, Corollary 2.2], for any $\delta > 0$ we have

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, E + B(0,\delta))\right] \leq C_{q,p}\left(\delta + \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\right).$$

It is then sufficient to deal with $\mathcal{N}(f_n, [\alpha, \beta])$ where $[\alpha, \beta]$ is either included in the interior of the set $\{\psi_\rho = 0\}$ or in the set $\{\psi > 0\} \cap (0, 2\pi)$. We details these two cases below.

<u>(a) $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi] \,/\, (E + B(0, \delta))$:</u>

By our assumptions on ψ_ρ, we know that ψ_ρ is both continuous and bounded from below on $[\alpha, \beta]$ so that there exists some positive constants c, C such that

$$c\,\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(x) \leq \psi_\rho(x) \leq C\,\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(x). \tag{4.14}$$

Then one may proceed exactly as in the step (ii) of the proof of Corollary 4.1.1, combining the upper and lower bounds in Equation (4.14) with the ones of Equations (4.12) and (4.13), to deduce that uniformly in $x \in [\alpha, \beta]$, one has

$$\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} \to 1, \qquad \frac{K_n' * \psi_\rho(x)}{nK_n * \psi_\rho(x)} \to 0.$$

The fact that these convergences are uniform implies that the integrand $\frac{1}{n}\sqrt{I_n(x)}$ in Kac–Rice formula is again bounded on $[\alpha, \beta]$ and by dominated convergence, as above we deduce that

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [\alpha, \beta])]}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{n}\sqrt{I_n(x)}dx = \frac{\beta - \alpha}{\pi}\frac{1}{\sqrt{3}} + o_\delta(1).$$

<u>(b) $[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{i=1}^{p}]a_i + \delta, b_i - \delta[$:</u>

Let us adapt to this setting the computations of the step (i) of the proof of Corollary 4.1.1. For convenience, we set $\mathrm{Supp}(\psi_\rho) := \{\psi_\rho > 0\}$ and $x - \mathrm{Supp}(\psi_\rho) := \{x - u,\, u \in \mathrm{Supp}(\psi_\rho)\}$. Then we have

$$\begin{aligned} n\mathbb{E}\left[f_n^2(x)\right] &= \int_0^{2\pi} K_n(y)\psi_\rho(x-y)dy = \int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} K_n(y)\psi_\rho(x-y)dy \\ &= \int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\psi_\rho(x-y)dy - \int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\cos(ny)}{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\psi_\rho(x-y)dy. \end{aligned}$$

If $x \in [\alpha, \beta]$ and since $[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{i=1}^{p}]a_i + \delta, b_i - \delta[$ then $\mathrm{dist}\,(x, \mathrm{Supp}(\psi_\rho)) \geq \delta$. Then, one can use Riemann–Lebesgue lemma again, to do so we first write

$$\begin{aligned}
&\int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\cos(ny)}{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\psi_\rho(x-y)dy = \int_{\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\cos(n(x-u))}{2\sin^2\left(\frac{x-u}{2}\right)}\psi_\rho(u)dy \\
= \;& \cos(nx)\int_{\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\cos(nu)}{2\sin^2\left(\frac{x-u}{2}\right)}\psi_\rho(u)dy + \sin(nx)\int_{\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\sin(nu)}{2\sin^2\left(\frac{x-u}{2}\right)}\psi_\rho(u)dy.
\end{aligned}$$

Now, we recall that $\mathrm{Supp}(\psi_\rho)$ can be written as a finite union of open intervals $\bigcup_{i=1}^r]d_i, e_i[$. Let $\epsilon > 0$, on each interval $]d_i, e_i[$ one may find $\psi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(]d_i, e_i[)$ such that $\int_{d_i}^{e_i} |\psi_\rho(x) - \psi_i(x)|dx < \epsilon$. We then build a global approximation ψ_ϵ such that $\mathrm{Supp}(\psi_\epsilon = 0) = \mathrm{Supp}(\psi_\rho = 0)$ and for each $i \in \{1, \cdots, r\}$ we have $\psi_\epsilon = \psi_i$ on $]d_i, e_i[$. Then we may write

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\cos(nu)}{2\sin^2\left(\frac{x-u}{2}\right)}\psi_\rho(u)dy - \int_{\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\cos(nu)}{2\sin^2\left(\frac{x-u}{2}\right)}\psi_\epsilon(u)dy \right| \\
\leq \;& \sum_{i=1}^r \int_{d_i}^{e_i} \frac{|\psi_i(x) - \psi_\rho(x)|}{2\sin^2\left(\frac{x-u}{2}\right)}dx \leq C_r \frac{\epsilon}{\delta^2}.
\end{aligned}$$

By construction, we know that ψ_ϵ is $\mathcal{C}^1$ on $]d_i, e_i[$. One can then make an integration by parts formula as in step (i) of the proof of Corollary 4.1.1 which gives

$$\int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\epsilon)} \frac{\cos(ny)}{4\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\psi_\epsilon(x-y)dy = O_\epsilon\left(\frac{1}{n\delta^3}\right).$$

We insist on the fact that the above remainder depends on ϵ but this will not be a problem since we shall let $n \to \infty$ before letting $\epsilon, \delta \to 0$. Besides, using that $\sin^2 \leq 1$ and that $\int_{\mathrm{supp}(\psi_\rho)} \psi_\rho(u)du = 1$ we may deduce that

$$\int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\psi_\rho(x-y)dy \geq \frac{1}{2}.$$

Thus we can write the following expansion:

$$n\mathbb{E}\left[f_n^2(x)\right] = \int_0^{2\pi} K_n(y)\psi_\rho(x-y)dy = \underbrace{\int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\psi_\rho(x-y)dy}_{\geq\frac{1}{2}} + O_\epsilon\left(\frac{1}{n\delta^3}\right) + O\left(\frac{\epsilon}{\delta^2}\right).$$

Following exactly the same lines as in step (i) above, in fact this case is actually simpler and does not require Riemann–Lebesgue lemma nor approximation of ψ_ρ by smoother functions, we get that

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[f_n'(x)^2] = \frac{1}{4} \times \int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\psi_\rho(x-y)dy + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right).$$

as well as

$$\mathbb{E}[f_n(x)f_n'(x)] = \frac{1}{2}K_n' * \mu_\rho(x) = \frac{1}{4} \times \int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\sin(ny)}{\sin^2(y/2)}\psi_\rho(x-y)dy + O\left(\frac{1}{n\delta^3}\right).$$

As before, up to approximating ψ_ρ by a smoother function ψ_ϵ in $L^1(\mathrm{Supp}(\psi_\rho))$ and performing an integration by parts to quantify Riemann-Lebesgue convergence we can write the

$$\int_{x-\mathrm{Supp}(\psi_\rho)} \frac{\sin(ny)}{\sin^2(y/2)}\psi_\rho(x-y)dy = O_\epsilon\left(\frac{1}{n\delta^3}\right) + O\left(\frac{\epsilon}{\delta^2}\right)$$

Finally, plugging these estimates into Kac–Rice formula leads to the desired estimate:

$$\frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n, [\alpha,\beta])]}{n} = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1}{n}\sqrt{I_n(x)}dx = \frac{\beta-\alpha}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} + O_\epsilon\left(\frac{1}{n\delta^3}\right) + O\left(\frac{\epsilon}{\delta^2}\right).$$

As before, we conclude the proof by additivity in the Kac–Rice formula and we first let $n \to \infty$, then we let $\epsilon \to 0$ and at the very end $\delta \to 0$.

Spectral density with Hölder derivative

Finally, we now give the proof of Theorem 4.1.1, i.e. we get rid of the assumption on the nodal set $\{\psi_\rho = 0\}$ in Theorem 4.1.2 by requiring a slightly stronger regularity. For simplicity assume here that ψ_ρ is globally $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{T})$ which means that ψ_ρ is derivable on $\mathbb{R}$, 2π-periodic and that

$$\forall (x,y) \in [0,2\pi]^2, \left|\psi_\rho'(x) - \psi_\rho'(y)\right| \le [\psi_\rho']_\alpha \, |x-y|^\alpha \text{ where } [\psi_\rho']_\alpha < +\infty.$$

We refer to Remark 4.2.2 at the end of the section for the case where ψ_ρ is only $\mathcal{C}^1$ with Hölder derivative on an open set of full measure. Recall that, based on Lemma 4.2.3, for some constant C_ρ that only depends on the spectral density ψ_ρ, we then have

$$\forall n \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}, |K_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x)| \le \frac{C_\rho}{n},$$

$$\forall n \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}, |L_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x)| \le \frac{C_\rho}{n}.$$

The proof of Theorem 4.1.1 is divided in three distinct steps that we sketch below before giving details in the sequel.

1. Exploiting the rate of convergence recalled just above, we may prove that the integrand $\frac{\sqrt{I_n(x)}}{n}$ in Kac–Rice formula is bounded from above uniformly for $n \ge 1$ and $x \in [0,2\pi]$. As such, one is left to establish the pointwise convergence and use the dominated convergence.

2. As before, using the Fejér–Lebesgue Theorem at every point x such that $\psi_\rho(x) > 0$ we shall obtain that
$$\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} \sim \frac{\psi_\rho(x)}{\psi_\rho(x)} \sim 1, \ \frac{K_n' * \psi_\rho(x)}{nK_n * \psi_\rho(x)} \to 0$$
and so
$$\frac{\sqrt{I_n(x)}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
This step only requires the continuity of ψ_ρ and the regularizing properties of K_n and L_n which were already used in the previous sections.

3. It remains to consider the case where $\psi_\rho(x) = 0$ which is not covered by the previous situation as the limit in the Kac–Rice formula integrand involves the indeterminate form $\frac{0}{0}$. To bypass this problem, we must exploit the derivability of ψ_ρ and establish the convergence in $L^2([0, 2\pi])$ of $n\,(K_n * \psi_\rho - \psi_\rho)$ and $\frac{2}{n\alpha_n}\,(L_n * \psi_\rho - \psi_\rho)$ towards the same non-degenerate limit denoted by $\mathcal{L}[\psi_\rho](x)$. On the other hand, up to extracting a subsequence the convergence is also almost everywhere and as a consequence we obtain for $\psi_\rho(x) = 0$
$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2\alpha_n}\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} &= \frac{1}{n^2\alpha_n}\frac{L_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{n\alpha_n}\,(L_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x))}{n\,(K_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}[\psi_\rho](x)}{\underbrace{\mathcal{L}[\psi_\rho](x)}_{>0}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
Finally one is left to use the dominated convergence Theorem and let $n \to \infty$ in Kac–Rice formula.

Step 1: bounded integrand in Kac–Rice formula

First of all, we have the trivial upper bound

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{I_n(x)}}{n} &= \sqrt{\frac{1}{n^2\alpha_n}\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} - \left(\frac{K_n' * \psi_\rho(x)}{2nK_n * \psi_\rho(x)}\right)^2}\\ &\leq \underbrace{\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}}_{\to\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)}}.\end{aligned}$$

Hence, one is left to bound the ratio $\frac{L_n*\psi_\rho(x)}{K_n*\psi_\rho(x)}$. Let us assume that $\psi_\rho(x) > 2\frac{C_\rho}{n}$, relying on Lemma 4.2.3, we may write
$$\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} \leq \frac{\psi_\rho(x) + \frac{C_\rho}{n}}{\psi_\rho(x) - \frac{C_\rho}{n}} = \frac{1 + \frac{C_\rho}{n\psi_\rho(x)}}{1 - \frac{C_\rho}{n\psi_\rho(x)}} \leq \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$$

Let us assume now that $\psi_\rho(x) \leq 2\frac{C_\rho}{n}$. Relying on the Lemma 4.2.4, there exists another constant $c_\rho > 0$ that only depends on ψ_ρ such that

$$K_n * \psi_\rho(x) \geq \frac{c_\rho}{n}.$$

Thus we get

$$\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} \leq \frac{n}{c_\rho}\left(\psi_\rho(x) + \frac{C_\rho}{n}\right) \leq \frac{n}{c_\rho}\frac{3C_\rho}{n} = 3\frac{C_\rho}{c_\rho}.$$

Gathering the previous estimates entails that

$$\forall n \geq 1,\, \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)} \leq 3 + 3\frac{C_\rho}{c_\rho},$$

which concludes this first step.

Step 2: the case where $\psi_\rho(x) > 0$

For the second step, as in the previous sections, we rely on the fact that both L_n and K_n are regularizing kernels such that by Lemma 4.2.2

$$L_n * \psi_\rho(x) \to \psi_\rho(x) > 0, \quad K_n * \psi_\rho(x) \to \psi_\rho(x) > 0, \quad \frac{1}{n}K_n' * \psi_\rho(x) \to 0.$$

Plugging theses estimates in Kac–Rice formula entails that

$$\frac{\sqrt{I_n(x)}}{n} = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{n^2\alpha_n}}_{\to\frac{1}{3}}\underbrace{\frac{L_n * \psi_\rho(x)}{K_n * \psi_\rho(x)}}_{\to 1} - \underbrace{\left(\frac{K_n' * \psi_\rho(x)}{2nK_n * \psi_\rho(x)}\right)^2}_{\to 0}} \to \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Step 3: the case where $\psi_\rho(x) = 0$

This last step where $\psi_\rho(x) = 0$ is arguably more delicate as it requires some regularity of the spectral density. While one could study the limit of the Kac–Rice integrand in the pointwise sense it is simpler to consider convergence in $L^2 = L^2([0, 2\pi])$ which will be sufficient for our purpose. First, using the Fourier representation of Fejér kernel we can write

$$n\left(K_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x)\right) \overset{L^2}{=} n\sum_{|k|>n} \underbrace{\rho(k)}_{=\hat{\psi}_\rho(k)} e^{ikx} - \sum_{|k|\leq n} |k|\rho(k)e^{ikx}.$$

Since ψ_ρ is $\mathcal{C}^1$ then $(k\rho(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ and thus

$$\left\|n\sum_{|k|>n}\rho(k)e^{ikx}\right\|_{L^2}^2 = n^2\sum_{|k|>n}\rho(k)^2 \leq \sum_{|k|>n} k^2\rho(k)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

In the same way,

$$\sum_{|k|\le n} |k|\rho(k)e^{ikx} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\rho(k)e^{ikx}.$$

Thus,

$$n\left(K_n * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} -\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\rho(k)e^{ikx} := \mathcal{L}\left[\psi_\rho\right](x). \tag{4.15}$$

We imitate this strategy for $\frac{1}{n\alpha_n}\left(L_n * \psi_\rho - \psi_\rho\right)$ though the Fourier representation is slightly more involved. The Fourier decomposition of L_n reads as (see e.g. [ADP19, p 209])

$$L_n(x) := \alpha_n \sum_{r=-n}^{n} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-|r|} k(|r|+k)\right) e^{irx}.$$

so that

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\alpha_n}\left(L_n * \psi_\rho - \psi_\rho\right) &= \frac{1}{n}\sum_{|k|\le n-1} \rho(k) \left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-|k|} r\left(|k|+r\right)\right) e^{ikx} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\psi_\rho(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{k,n}\rho(k)e^{ikx}, \end{aligned}$$

where

$$C_{k,n} := \mathbb{1}_{\{|k|\le n-1\}} \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n-|k|} r\left(|k|+r\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

Hence, one is left to study the convergence of $(C_{k,n}\ \rho(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ in $l^2(\mathbb{Z})$ as $n\to\infty$. We may split $C_{k,n}$ in two terms by writing that

$$C_{k,n} = \underbrace{\mathbb{1}_{\{|k|\le n-1\}} \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n-|k|} r^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}_{:=A_{k,n}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{|k|\le n-1\}} \frac{|k|}{n^2}\sum_{r=1}^{n-|k|} r}_{:=B_{k,n}}.$$

Let us first deal with the term $A_{k,n}$. One has

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{\{|k|\le n-1\}} \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n-|k|} r^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{1}_{\{|k|\le n-1\}}\sum_{r=1}^{n-|k|} r^2 - \sum_{r=1}^{n} r^2\right) \\ &= -\frac{\sum_{n-|k|+1}^{n} r^2}{n^2}\mathbb{1}_{\{|k|\le n-1\}} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\mathbb{1}_{\{|k|\ge n\}} \end{aligned}$$

Besides, as before, since $(k\rho(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ we get

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\mathbb{1}_{\{|k|\ge n\}}\right)^2 \rho(k)^2 \le Cn^2 \sum_{|k|\ge n} \rho(k)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On the other hand, we have

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{n-|k|+1}^{n} r^2 \mathbb{1}_{\{|k|\leq n-1\}} - |k| \mathbb{1}_{\{|k|\leq n-1\}} \right| = \mathbb{1}_{\{|k|\leq n-1\}} \frac{1}{n^2} \sum_{n-|k|+1}^{n} \left(n^2 - r^2\right)$$
$$= \mathbb{1}_{\{|k|\leq n-1\}} \frac{1}{n^2} \sum_{n-|k|+1}^{n} (n-r)(n+r) \leq \mathbb{1}_{\{|k|\leq n-1\}} \frac{2k}{n}.$$

As a result we derive that

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{n-|k|+1}^{n} r^2 \mathbb{1}_{\{|k|\leq n-1\}} - |k| \mathbb{1}_{\{|k|\leq n-1\}} \right|^2 \rho(k)^2$$
$$\leq \sum_{|k|\leq n-1} \frac{4k^2}{n^2} \rho(k)^2 \leq \frac{4}{n^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \rho(k)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Noticing that $(|k|\mathbb{1}_{\{|k|\leq n-1\}}\rho(k))_{k\in\mathbb{Z}} \xrightarrow[n\to\infty]{l^2(\mathbb{Z})} (|k|\rho(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ and gathering the previous facts implies

$$(A_{k,n}\ \rho(k))_{k\in\mathbb{Z}} \xrightarrow[n\to\infty]{l^2(\mathbb{Z})} (-|k|\rho(k))_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{4.16}$$

One is then left to deal with the only remaining sequence

$$(B_{k,n}\ \rho(k))_{k\in\mathbb{Z}} = \left(\rho(k) \mathbb{1}_{|k|\leq n-1} \frac{|k|}{n^2} \sum_{r=1}^{n-|k|} r \right)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

We simply notice that this sequence is dominated by $(|k|\rho(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ which by our assumptions belongs to $l^2(\mathbb{Z})$ and that for each fixed k:

$$\mathbb{1}_{|k|\leq n-1} \frac{|k|}{n^2} \sum_{r=1}^{n-|k|} r = |k| \mathbb{1}_{|k|\leq n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-|k|} \frac{r}{n} \right) \rightarrow\ |k| \int_0^1 x dx = \frac{|k|}{2}.$$

Using dominated convergence in $l^2(\mathbb{Z})$ entails that

$$(B_{k,n}\ \rho(k))_{k\in\mathbb{Z}} \xrightarrow[n\to\infty]{l^2(\mathbb{Z})} \left(\frac{|k|}{2} \rho(k) \right)_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{4.17}$$

Therefore, gathering the limits (4.16) and (4.17), we get

$$(C_{k,n}\ \rho(k))_{k\in\mathbb{Z}} \xrightarrow[n\to\infty]{l^2(\mathbb{Z})} \left(-\frac{|k|}{2} \rho(k) \right)_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{4.18}$$

As a consequence we conclude that

$$\frac{1}{n\alpha_n}\left(L_n * \psi_\rho - \psi_\rho\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} -\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\rho(k)e^{ikx} = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\psi_\rho](x). \tag{4.19}$$

<u>Conclusion of the proof:</u>

We argue by contradiction and we assume that as n goes to infinity

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} \not\to \frac{\lambda(\{\psi_\rho=0\})}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2\pi-\lambda(\{\psi_\rho=0\})}{\pi\sqrt{3}}.$$

Then, for some subsequence $(n_p)_{p\geq 1}$ and $\eta>0$ we would have

$$\left|\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_{n_p},[0,2\pi])\right]}{n_p} - \frac{\lambda(\{\psi_\rho=0\})}{\pi\sqrt{2}} - \frac{2\pi-\lambda(\{\psi_\rho=0\})}{\pi\sqrt{3}}\right| \geq \eta.$$

Up to extracting another subsequence, thanks to Equations (4.15) and (4.19), we may assume that

$$n_p\left(K_{n_p} * \psi_\rho - \psi_\rho\right) \to \mathcal{L}[\psi_\rho](x), \qquad \frac{1}{n_p\alpha_{n_p}}\left(L_{n_p} * \psi_\rho - \psi_\rho\right) \to \frac{1}{2}\mathcal{L}[\psi_\rho](x).$$

By Kac–Rice formula, we would get

$$\frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_{n_p},[0,2\pi])\right]}{n_p} = \int_{\{\psi_\rho\neq 0\}}\frac{\sqrt{I_{n_p}(x)}}{n_p}dx + \int_{\{\psi_\rho=0\}}\frac{\sqrt{I_{n_p}(x)}}{n_p}dx.$$

The first integral would converge towards $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda\left(\psi_\rho\neq 0\right)$ by combining the conclusions of Step 1 and Step 2 above, together with dominated convergence. To deal with the second integral we must observe the following facts:

— If $\psi_\rho(x)=0$ then:

$$n_p\left(K_{n_p} * \psi_\rho(x) - \psi_\rho(x)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(\frac{n_p y}{2})}{\sin^2(\frac{y}{2})}\psi_\rho(x-y)dy$$
$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(\frac{n_p y}{2})\psi_\rho(x-y)dy$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Riemann-Lebesgue}} \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\psi_\rho(x-y)dy = \frac{1}{2}.$$

This implies in particular that $\mathcal{L}[\psi_\rho](x)\geq\frac{1}{2}$ provided that $\psi_\rho(x)=0$.

— If $\psi_\rho(x)=0$ then $\psi_\rho'(x)=0$ since ψ_ρ is non negative. Thus,

$$K_{n_p}' * \psi_\rho(x) = K_{n_p} * \psi_\rho'(x) \to \psi_\rho'(x) = 0.$$

Based on the previous observation we then have that $\frac{K_{n_p}' * \psi_\rho(x)}{n_p K_{n_p} * \psi_\rho(x)} \to 0$.

Then, relying on the third step of the proof, we would have

$$\psi_\rho(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{I_{n_p}(x)}}{n_p} \to \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

By the first step of the proof and dominated convergence again, the second integral would converge to $\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\left(\psi_\rho = 0\right)$ which brings a contradiction and thus achieves the proof of Theorem 4.1.1.

Remark 4.2.2. *Note that we gave the proof of Theorem 4.1.1 is the case where ψ_ρ is globally $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. If ψ_ρ is only $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ on a open set of full measure, then the complementary set is a compact set of zero measure and can thus be covered by a finite number of intervals of arbitrary small length. On each of these intervals, using Corollary 2.2 of [PY15] as we have done in Step (iii) of the proof of Corollary 4.1.1, we obtain that, as n goes to infinity, the normalized expected number of zeros of f_n in the union of these intervals is arbitrary small, hence the conclusion of Theorem 4.1.1.*

Remark 4.2.3. *As a by product, the previous proof suggests that the Kac-Rice integrand $\sqrt{I_n(x)}/n$ converges pointwise towards $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_{\psi(x)=0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1}_{\psi(x)\neq 0}$. Note that, in the case $\psi(x) = 0$, for simplicity the previous proof uses convergences in L^2 but one could actually work in the pointwise sense. In particular, the limit is not continuous hence the convergence cannot be uniform. Besides, the pointwise limit is not constant which highlights the fact that the roots are not equidistributed anymore as soon as the spectral density ψ_ρ vanishes. Moreover, Corollary 2.2 of [PY15] guarantees the angular equidistribution of the roots on a domain of type $\{|r| \leq |z| \leq \frac{1}{r}\}$, thus it seems that letting $r \to 1$ breaks the equidistribution in this setting. Finally, assuming that ψ_ρ is globally $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ provides a natural instance where $\sqrt{I_n}/n$ is uniformly bounded and thus improves in this particular setting the upper bound provided by the same Corollary 2.2 in [PY15].*

4.3 Salem–Zygmund type Central Limit Theorems

The goal of this section is to give the proofs of Theorems 4.1.5 and 4.1.6, that is the unidimensional and functional Central Limit Theorems à la Salem–Zygmund stated in the introduction. In order to do so, let us first give a simple estimate on the two points correlation function of the model.

4.3.1 On the two points correlation function

Recall that if f_n is defined by Equation (4.1), we have $\mathbb{E}[f_n^2(x)] = 2\pi\, K_n * \mu_\rho(x)$ where μ_ρ is the associated spectral measure. Similarly the two points correlation function can be expressed as a kind of convolution with the following polarized Fejér kernel defined on $[0, 2\pi]^2$ by

$$K_n(x, y) := \frac{1}{n} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{ny}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)}. \tag{4.20}$$

Lemma 4.3.1. *For any $x, y \in [0, 2\pi]$, we have*

$$\mathbb{E}[f_n(x)f_n(y)] = \cos\left(\frac{(n+1)}{2}(x-y)\right)\int_0^{2\pi} K_n(x-u, y-u)\mu_\rho(du). \tag{4.21}$$

Proof. If f_n is defined by Equation (4.1), using the fact that $\mathbb{E}[a_k a_\ell] = \mathbb{E}[b_k b_\ell] = \rho(k-\ell)$, standard computations give

$$\mathbb{E}[f_n(x)f_n(y)] = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \rho(k-l)\cos(kx-ly) = \Re\left(\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\rho(k-l)e^{i(kx-ly)}\right).$$

Writing that for all integer k,

$$\rho(k) = \widehat{\mu_\rho}(k) = \int_0^{2\pi} e^{-iku}\mu_\rho(du),$$

it results that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\rho(k-l)e^{i(kx-ly)} &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} e^{i(k(x-u)-l(y-u))}\right)\mu_\rho(du) \\
&= e^{i(x-y)}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{n}\sum_{k,l=0}^{n-1} e^{ik(x-u)}e^{-i\,l(y-u)}\right)\mu_\rho(du) \\
&= e^{i(x-y)}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{n}\frac{1-e^{in(x-u)}}{1-e^{i(x-u)}}\frac{1-e^{-i\,n(y-u)}}{1-e^{-i(y-u)}}\right)\mu_\rho(du) \\
&= e^{i\frac{(n+1)}{2}(x-y)}\int_0^{2\pi} K_n(x-u, y-u)\mu_\rho(du).
\end{aligned}$$

Hence, we obtain

$$\mathbb{E}[f_n(x)f_n(y)] = \cos\left(\frac{(n+1)}{2}(x-y)\right)\int_0^{2\pi} K_n(x-u, y-u)\mu_\rho(du).$$

Remark that when $x = y$, we indeed fall back on $\mathbb{E}[f_n(x)^2] = 2\pi\, K_n * \mu_\rho(x)$. □

Lemma 4.3.2. *For all $x, y \in [0, 2\pi]$, $n \geq 1$ and for $\varepsilon > 0$ arbitrarily chosen, if $d(x, y)$ denotes the distance between x and y modulo 2π, there exist a constant $C > 0$ such that*

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} K_n(x-u, y-u)\mu_\rho(du) \\
\leq\ & C\left(\frac{\sqrt{K_n * \mu_\rho(x)} + \sqrt{K_n * \mu_\rho(y)}}{\sqrt{n}\varepsilon} + \frac{1}{n\varepsilon^2} + \sqrt{K_n * \mu_\rho(x)}\sqrt{K_n * \mu_\rho(y)}\mathbb{1}_{d(x,y)\leq 2\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Proof. Notice that

$$\int_0^{2\pi} K_n(x-u,y-u)\mu_\rho(du) = \mathbb{E}_U\left[\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{n(x-U)}{2}\right)\sin\left(\frac{n(y-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-U}{2}\right)\sin\left(\frac{y-U}{2}\right)}\right],$$

where U is a random variable with values in $[0,2\pi]$ whose law is μ_ρ. Let us fix $\varepsilon > 0$ and recall that $d(x,y)$ is the distance between x and y modulo 2π. If U is far enough from both points x and y, we have for a positive constant C which may change from line to line

$$\left|\mathbb{E}_U\left[\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{n(x-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(x-U)}{2}\right)}\mathbb{1}_{d(x,U)>\varepsilon}\frac{\sin\left(\frac{n(y-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(y-U)}{2}\right)}\mathbb{1}_{d(y,U)>\varepsilon}\right]\right| \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

If U is close to x and far enough from y, by Cauchy–Schwarz inequality, we get

$$\left|\mathbb{E}_U\left[\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{n(x-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(x-U)}{2}\right)}\mathbb{1}_{d(x,U)\leq\varepsilon}\frac{\sin\left(\frac{n(y-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(y-U)}{2}\right)}\mathbb{1}_{d(y,U)>\varepsilon}\right]\right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}\varepsilon}\mathbb{E}_U\left[\frac{1}{n}\frac{\sin^2\left(\frac{n(x-U)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{(x-U)}{2}\right)}\right]^{1/2},$$

that is to say

$$\left|\mathbb{E}_{\mu_\rho}\left[\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{n(x-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(x-U)}{2}\right)}\mathbb{1}_{d(x,U)\leq\varepsilon}\frac{\sin\left(\frac{n(y-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(y-U)}{2}\right)}\mathbb{1}_{d(y,U)>\varepsilon}\right]\right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}\varepsilon}\sqrt{K_n*\mu_\rho(x)}.$$

Finally, if U is close to both x and y, Cauchy–Schwarz inequality gives again

$$\left|\mathbb{E}_{\mu_\rho}\left[\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{n(x-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(x-U)}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{n(y-U)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(y-U)}{2}\right)}\mathbb{1}_{\substack{d(x,U)\leq\varepsilon\\ d(y,U)\leq\varepsilon}}\right]\right| \leq C\sqrt{K_n*\mu_\rho(x)}\sqrt{K_n*\mu_\rho(y)}\mathbb{1}_{d(x,y)\leq 2\varepsilon}.$$

□

From Lemma 4.3.1 and Lemma 4.3.2, one can then deduce the following estimates which will play a key role in the proof of the Central Limit Theorems à la Salem–Zygmund. Recall that the probability $\mathbb{P}$ and the expectation $\mathbb{E}$ are the ones associated with the random coefficients (a_k,b_k) of the trigonometric polynomial $f_n(x)$. Now, if X and Y are two independent uniform random variables in $[0,2\pi]$, independent of the random coefficients (a_k,b_k), we will denote by $\mathbb{P}_{X,Y}$ and $\mathbb{E}_{X,Y}$ the associate law and expectation and by $\mathbb{P}_X$, $\mathbb{P}_Y$, $\mathbb{E}_X$, $\mathbb{E}_Y$ the marginals.

Lemma 4.3.3. *Let X and Y be two independent random variables with uniform distribution in $[0,2\pi]$, independent of the random coefficients (a_k,b_k). There exists a universal constant $C>0$ such that, for any $\varepsilon>0$ and any integer $n\geq 1$*

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left|\mathbb{E}[f_n(X)f_n(Y)]\right| \leq C\left(\frac{1}{n\varepsilon^2}+\frac{1}{\sqrt{n}\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}\right).$$

In particular, choosing $\varepsilon = n^{-1/3}$, we have

$$\mathbb{E}_{X,Y} |\mathbb{E}[f_n(X)f_n(Y)]| \leq \frac{C}{n^{1/6}}.$$

Proof. Combining Equation (4.21) of Lemma 4.3.1 and Lemma 4.3.2, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{X,Y} |\mathbb{E}[f_n(X)f_n(Y)]| &\leq \frac{C}{\sqrt{n\epsilon}} \left(\mathbb{E}_X \left[\sqrt{K_n * \mu_\rho(X)} \right] + \mathbb{E}_Y \left[\sqrt{K_n * \mu_\rho(Y)} \right] \right) \\ &+ \frac{1}{n\epsilon^2} + \mathbb{E}_{X,Y} \left[\sqrt{K_n * \mu_\rho(x)} \sqrt{K_n * \mu_\rho(y)} \mathbb{1}_{d(x,y)\leq 2\epsilon} \right].\end{aligned}$$

By Cauchy–Schwarz inequality, we have $\mathbb{E}_X \left[\sqrt{K_n * \mu_\rho(X)} \right]^2 \leq \mathbb{E}_X[K_n * \mu_\rho(X)]$. Since $\|K_n\|_1 = 1$ and μ_ρ is a probability measure, by Fubini we have

$$\mathbb{E}_X[K_n*\mu_\rho(X)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x-u)\mu_\rho(du)dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x-u)dx \right) \mu_\rho(du) = 1.$$

By Cauchy–Schwarz again, we get

$$\mathbb{E}_{X,Y} \left[\sqrt{K_n * \mu_\rho(X)} \sqrt{K_n * \mu_\rho(Y)} \mathbb{1}_{d(X,Y)|\leq 2\varepsilon} \right] \leq \sqrt{\mathbb{E}_{X,Y} \left[K_n * \mu_\rho(Y) \mathbb{1}_{d(X,Y)\leq 2\varepsilon} \right]}$$

and again using Fubini inversion (integrating first in X and then in Y)

$$\mathbb{E}_{X,Y} \left[K_n * \mu_\rho(Y) \mathbb{1}_{d(X,Y)|\leq 2\varepsilon} \right] = 4\varepsilon.$$

□

4.3.2 A unidimensional Central Limit Theorem

We are now in position to give the proof of Theorem 4.1.5 stated in the introduction. We follow the main global strategy as the original proof of the Central Limit Theorem by Salem–Zygmund in [SZ54], i.e. we first establish a L^2 estimate and then conclude by a Borel–Cantelli type argument. Recall that, as defined just before Lemma 4.3.3, the probability $\mathbb{P}$ and the expectation $\mathbb{E}$ are associated with the random coefficients, whereas $\mathbb{P}_X$, $\mathbb{E}_X$, $\mathbb{P}_{X,Y}$ and $\mathbb{E}_{X,Y}$ are associated with the random evaluation points X and Y, that are uniformly distributed in $[0, 2\pi]$, independent and independent of the coefficients. Since $\mathbb{E}[f_n^2(X)] = 2\pi\, K_n * \mu_\rho(X)$, if Y is an independent copy of X, Fubini inversion and direct calculation yield

$$\begin{aligned}\Delta_n &:= \mathbb{E} \left[\left| \mathbb{E}_X \left[e^{itf_n(X)} \right] - \mathbb{E}_X \left[e^{-\frac{t^2}{2} 2\pi\, K_n*\mu_\rho(X)} \right] \right|^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{X,Y} \left[e^{-\frac{t^2}{2}\mathbb{E}[(f_n(X)-f_n(Y))^2]} - e^{-\frac{t^2}{2} 2\pi(K_n*\mu_\rho(X)+K_n*\mu_\rho(Y))} \right].\end{aligned}$$

Thanks to the fact that $x \mapsto e^{-x}$ is $1-$Lipschitz on $\mathbb{R}^+$, we deduce that

$$\begin{aligned}\Delta_n &\leq \frac{t^2}{2}\,\mathbb{E}_{X,Y}\left[\left|\mathbb{E}[(f_n(X)-f_n(Y))^2] - 2\pi\left(K_n * \mu_\rho(X) + K_n * \mu_\rho(Y)\right)\right|\right] \\ &= t^2\,\mathbb{E}_{X,Y}\left[\left|\mathbb{E}[f_n(X)f_n(Y)]\right|\right].\end{aligned}$$

Using Lemma 4.3.3 with $\varepsilon = n^{-1/3}$, we obtain that there exists a universal constant $C > 0$ such that

$$\Delta_n \leq C t^2 n^{-1/6}.$$

By Borel–Cantelli Lemma, we then deduce that $\mathbb{P}$-almost surely, as n goes to infinity, we get

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}2\pi\,K_{n^7}*\mu_\rho(X)}\right]\right| \to 0.$$

Now, let m be a positive integer, there exists a unique n such that $n^7 < m \leq (n+1)^7$. Using Birkhoff-Khinchine Theorem, we have then the following Lemma.

Lemma 4.3.4. *As m goes to infinity*

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right]\right| = O\left(\frac{1}{m^{1/14}}\right).$$

Proof of Lemma 4.3.4. Recall that m is a large positive integer and n is defined as the unique integer such that $n^7 < m \leq (n+1)^7$. By Birkhoff–Khinchine theorem, we have the following key fact: $\mathbb{P}-$almost surely, $\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7} a_k^2 + b_k^2$ has a finite limit as n goes to infinity. By Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right]\right| \leq t\,\mathbb{E}_X\left[|f_{n^7}(X) - f_m(X)|^2\right]^{1/2}.$$

Otherwise, we have the estimate

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_X\left[|f_{n^7}(X) - f_m(X)|^2\right] &\leq 2\left(1-\sqrt{\frac{n^7}{m}}\right)^2 \mathbb{E}_X\left[f_{n^7}(X)^2\right] \\ &+2\,\mathbb{E}_X\left[\left|\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=n^7+1}^{m} a_k\cos(kX) + b_k\sin(kX)\right|^2\right] \qquad (4.22)\\ &= 2\left(1-\sqrt{\frac{n^7}{m}}\right)^2 \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} + \frac{2}{m}\sum_{k=n^7+1}^{m}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}.\end{aligned}$$

By Birkhoff–Khinchine Theorem, we have first

$$\left(1-\sqrt{\frac{n^7}{m}}\right)^2 \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} \sim \frac{1}{4n^9}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Besides, one may write

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\sum_{k=n^7+1}^{m}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} \leq \frac{1}{n^7}\sum_{k=n^7+1}^{(n+1)^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\\
&= \frac{(n+1)^7}{n^7}\frac{1}{(n+1)^7}\sum_{k=1}^{(n+1)^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} - \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\\
= &\left(\underbrace{\frac{1}{(n+1)^7}\sum_{k=1}^{(n+1)^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} - \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}}_{:=R_n}\right) + \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{6}\binom{7}{k}n^k}{n^7}}_{=O\left(\frac{1}{n}\right)} \times \underbrace{\frac{1}{(n+1)^7}\sum_{k=1}^{(n+1)^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}}_{=O(1)}.
\end{aligned}$$

Next we write

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=1}^{n^7}\left(\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\right)\left(\frac{1}{(n+1)^7}-\frac{1}{n^7}\right) + \frac{a_{(n+1)^7}+b_{(n+1)^7}}{2(n+1)^7}\\
&= \underbrace{\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\left(\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\right)}_{=O(1)}\underbrace{\left(\frac{1}{(1+1/n)^7}-1\right)}_{=O\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n+1}\underbrace{\frac{a_{(n+1)^7}^2+b_{(n+1)^7}^2}{2(n+1)^6}}_{=o(1)}.
\end{aligned}$$

Let us finally detail the $o(1)$ in the above equation. For any sequence $\{X_k\}_{k\geq 1}$ of standard Gaussian random variables, any $\beta > 0$ and any $\epsilon > 0$ we have

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(|X_k| > \epsilon k^{\beta}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\epsilon k^{\beta}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx < \infty.$$

Then Borel–Cantelli Lemma implies that $X_n/n^{\beta} \to 0$ almost surely, in particular in our case, we have $|a_{(n+1)^7}/(n+1)^3| = o(1)$, hence the result.

□

Combining this last Lemma 4.3.4 and Lemma 4.2.2, we deduce that as m and hence n both go to infinity, then $\mathbb{P}-$almost surely

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{t^2}{2}2\pi\, K_{n^7}*\mu_\rho(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}2\pi\, K_m*\mu_\rho(X)}\right]\right| \to 0.$$

Therefore, by triangular inequality, we obtain that as m goes to infinity, $\mathbb{P}-$almost surely,

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}2\pi\, K_m*\mu_\rho(X)}\right]\right| \to 0.$$

By dominated convergence theorem, using Lemma 4.2.2 again, we finally obtain that $\mathbb{P}-$almost surely

$$\lim_{m\to+\infty}\mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}2\pi\,\psi_\rho(x)}dx = \mathbb{E}_{X,N}\left[e^{it\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N}\right].$$

4.3.3 A functional Central Limit Theorem

In this section, we give a detailed proof of Theorem 4.1.6 stated in the introduction. Let g_n the stochastic process defined on $[0, 2\pi]$ by

$$g_n(t) := f_n\left(X + \frac{t}{n}\right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

then Theorem 4.1.6 precisely asserts that, $\mathbb{P}-$almost surely, $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ converges in distribution under $\mathbb{P}_X$ towards an explicit non-Gaussian process in the $\mathcal{C}^1$ topology. As classically done, in order to establish this statement, we will first prove the convergence of finite dimensional marginals and then we will invoke a tightness argument.

Convergence of finite dimensional marginals

Let us first establish the convergence of the finite dimensional marginals of $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$.

Proposition 4.3.1. *$\mathbb{P}-$almost surely, as n goes to infinity, the finite marginals of the localized process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ converge to the ones of a process $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ of the form $\sqrt{\psi_\rho(X)}N$, where the process $N = (N_t)_{t\in[0,2\pi]}$ is the stationary Gaussian process with $\sin_c$ as covariance function and independent of X.*

We fix a positive integer M, and two $M-$uplets $t = (t_1, \ldots, t_M) \in [0, 2\pi]^M$ and $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$ and we set

$$Z_n(X, t, \lambda) := \sum_{p=1}^{M} \lambda_p g_n(t_p) = \sum_{p=1}^{M} \lambda_p f_n\left(X + \frac{t_p}{n}\right).$$

Proving Proposition 4.3.1 then amounts to show that $\mathbb{P}-$almost surely, we have

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)}\right] = \mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{1}{2}\times 2\pi\sum_{p,q=1}^{M}\lambda_p\lambda_q\psi_\rho(X)\sin_c(t_p-t_q)}\right].$$

The proof follows globally the same lines as its one dimensional analogue Theorem 4.1.5. First the variance of $Z_n(X, t, \lambda)$ under $\mathbb{P}$ can be represented by a convolution with a Fejér-like kernel.

Lemma 4.3.5. *We have the representation*

$$\mathbb{E}\left[Z_n(X, t, \lambda)^2\right] = 2\pi\, K_n^{t,\lambda} * \mu_\rho(X) = \left(\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx\right) \bar{K}_n^{t,\lambda} * \mu_\rho(X),$$

with

$$K_n^{t,\lambda}(x) := \frac{1}{n}\left|\sum_{p=1}^{M} \lambda_p e^{i\frac{(n+1)}{2n}t_p} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}(x + \frac{t_p}{n})\right)}{\sin\left(\frac{x+\frac{t_p}{n}}{2}\right)}\right|^2, \quad \bar{K}_n^{t,\lambda}(x) := \frac{2\pi\, K_n^{t,\lambda}(x)}{\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx}.$$

Proof of Lemma 4.3.5. By linearity, we have

$$\mathbb{E}\left[Z_n(X,t,\lambda)^2\right] = \sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p \lambda_q \mathbb{E}\left[f_n\left(X+\frac{t_p}{n}\right) f_n\left(X+\frac{t_q}{n}\right)\right] \tag{4.23}$$

and as in the proof of Lemma 4.3.1 we have

$$\mathbb{E}\left[f_n\left(X+\frac{t_i}{n}\right) f_n\left(X+\frac{t_j}{n}\right)\right] \quad = \Re\left(\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \rho(k-l) e^{ik(X+\frac{t_p}{n})-il(X+\frac{t_q}{n})}\right).$$

Writing for all integer k that $\rho(k) = \int_0^{2\pi} e^{-ikx}\mu_\rho(dx)$, we obtain

$$\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \rho(k-l) e^{ik(X+\frac{t_p}{n})-il(X+\frac{t_q}{n})} = e^{i\frac{t_p-t_q}{n}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{n}\sum_{k,l=0}^{n-1} e^{ik(X+\frac{t_p}{n}-x)} e^{-i\,l(X+\frac{t_q}{n}-x)}\right)\mu_\rho(dx)$$

$$= e^{i\frac{t_p-t_q}{n}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{n}\frac{1-e^{in(X+\frac{t_p}{n}-x)}}{1-e^{i(X+\frac{t_q}{n}-x)}}\frac{1-e^{-i\,n(X+\frac{t_p}{n}-x)}}{1-e^{-i(X+\frac{t_q}{n}-x)}}\right)\mu_\rho(dx)$$

$$= e^{i\frac{(n+1)}{2n}(t_p-t_q)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{n(X+\frac{t_p}{n}-x)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(X+\frac{t_p}{n}-x)}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{n(X+\frac{t_q}{n}-x)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(X+\frac{t_q}{n}-x)}{2}\right)}\right)\mu_\rho(dx)$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(e^{i\frac{(n+1)}{2n}t_p}\frac{\sin\left(\frac{n(X+\frac{t_p}{n}-x)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(X+\frac{t_p}{n}-x)}{2}\right)}\right)}_{:=z_p}\underbrace{e^{-i\frac{(n+1)}{2n}t_q}\left(\frac{\sin\left(\frac{n(X+\frac{t_q}{n}-x)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(X+\frac{t_q}{n}-x)}{2}\right)}\right)}_{:=\overline{z_q}}\mu_\rho(dx).$$

Summing up on p and q, by symmetry we obtain

$$\sum_{p,q=1}^{M}\lambda_p\lambda_q\left(\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\rho(k-l)e^{ik(X+\frac{t_p}{n})-il(X+\frac{t_q}{n})}\right) \quad = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{p,q=1}^{M}\lambda_p z_p \lambda_q \overline{z_q}\right)\mu_\rho(dx)$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{p=1}^{M}\lambda_p z_p\right|^2 \mu_\rho(dx).$$

As a result

$$\mathbb{E}\left[Z_n(X,t,\lambda)^2\right] \quad = \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\left|\sum_{p=1}^{M}\lambda_p e^{i\frac{(n+1)}{2n}t_p}\frac{\sin\left(\frac{n(X-x+\frac{t_p}{n})}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(X-x+\frac{t_p}{n})}{2}\right)}\right|^2 \mu_\rho(dx).$$

With the definitions of $K_n^{t,\lambda}$ and $\bar{K}_n^{t,\lambda}$ above, it gives

$$\mathbb{E}\left[Z_n(X,t,\lambda)^2\right] = 2\pi\, K_n^{t,\lambda} * \mu_\rho(X) = \left(\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx\right) \times \bar{K}_n^{t,\lambda} * \mu_\rho(X).$$

$\square$

As the standard Fejér kernel, the normalized kernel $\bar{K}_n^{t,\lambda}$ is a good trigonometric kernel and we have the corresponding Fejér–Lebesgue Theorem whose proof is given in Section 4.5.2 of the Appendix.

Lemma 4.3.6. *As n goes to infinity, for almost every $x \in [0, 2\pi]$, we have*

$$\bar{K}_n^{t,\lambda} * \mu_\rho(x) \to \psi_\rho(x).$$

Let us now make explicit the asymptotics of the normalization factor.

Lemma 4.3.7. *As n goes to infinity, we have*

$$\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx = 2\pi \sum_{p,q=1}^{m} \lambda_p \lambda_q \operatorname{sin_c}(t_p - t_q) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Proof of Lemma 4.3.6. Note that the integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx$ can be seen as the convolution of the kernel $K_n^{t,\lambda}$ with the normalized Lebesgue measure on $[0, 2\pi]$ which is the spectral measure associated with $\rho(k) = \delta_0(k)$ i.e. the independent case. As a result, making $\rho(k-l) = \delta_{k,l}$ in the proof of Lemma 4.3.5, we get

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx = \sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k(t_p - t_q)}{n}\right)\right).$$

Since the cosine function has a bounded derivative, by standard comparison results between Riemann sums and their limits, we conclude

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx - \sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \operatorname{sin_c}(t_p - t_q)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$\square$

Combining Lemmas 4.3.5, 4.3.6 and 4.3.7, we have thus as n goes to infinity

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[Z_n(X,t,\lambda)^2\right] = 2\pi\psi_\rho(X)\sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \operatorname{sin_c}(t_p - t_q). \tag{4.24}$$

Note that in the independent case, since $\psi_\rho \equiv 1/2\pi$, we recover the standard $\operatorname{sin_c}$ correlation function. We proceed now as in the proof of Theorem 4.1.5 and establish an $\mathbb{L}^2$ estimate.

Lemma 4.3.8. *As n goes to infinity, we have*

$$\Delta_n := \mathbb{E}\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)}\right] - e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[Z_n(X,t,\lambda)^2\right]}\right|^2 = O\left(n^{-1/6}\right).$$

Proof. Exactly as in the proof of Theorem 4.1.5 given in Section 4.3.2, if X and Y are two independent random variables with uniform distribution in $[0, 2\pi]$, independent of the random coefficients (a_k, b_k), we have

$$\Delta_n \leq \mathbb{E}_{X,Y}\left[\left|\mathbb{E}\left[Z_n(X,t,\lambda)Z_n(Y,t,\lambda)\right]\right|\right].$$

Moreover, as in the proof of Lemma 4.3.2, if U is an independent variable with law μ_ρ, one can write

$$\mathbb{E}\left[Z_n(X,t,\lambda)Z_n(Y,t,\lambda)\right] = \sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \mathbb{E}\left[f_n\left(X + \frac{t_p}{n}\right) f_n\left(Y + \frac{t_q}{n}\right)\right]$$

$$= \sum_{p,q} \lambda_p\lambda_q \cos\left(\frac{n+1}{2}(X - Y + \frac{t_p - t_q}{n})\right) \mathbb{E}_U\left[\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}(X - U + \frac{t_p}{n})\right)}{\sin\left(\frac{X-U}{2} + \frac{t_p}{2n}\right)}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}(Y - U + \frac{t_q}{n})\right)}{\sin\left(\frac{Y-U}{2} + \frac{t_q}{2n}\right)}\right].$$

Proceeding as in the proofs of Lemmas 4.3.2 and 4.3.3, one then deduces that

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[\left|\mathbb{E}\left[Z_n(X,t,\lambda)Z_n(Y,t,\lambda)\right]\right|\right] \leq \sum_{p,q=1}^{M} |\lambda_p\lambda_q| \times O\left(\frac{1}{n\varepsilon^2} + \frac{1}{\sqrt{n}\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\right).$$

In particular, choosing $\varepsilon = n^{-1/3}$, we get the desired result. ∎

As above, to deduce the almost sure asymptotics starting from the $\mathbb{L}^2$ estimate, we invoke a Borel–Cantelli argument. Along the subsequence n^7, $\mathbb{P}-$almost surely, we have

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_{n^7}(X,t,\lambda)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[Z_{n^7}(X,t,\lambda)^2\right]}\right]\right| = 0.$$

Then Birkhoff–Khinchine Theorem allows to establish the next lemma, which is the multidimensional analogue of Lemma 4.3.4.

Lemma 4.3.9. *As m goes to infinity, if we choose n such that $n^7 < m \leq (n+1)^7$, then*

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_{n^7}(X,t,\lambda)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X,t,\lambda)}\right]\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{1/14}}\right).$$

Proof of Lemma 4.3.9. Let us rewrite

$$Z_n(X,t,\lambda) = \sum_{p=1}^{M} \lambda_j g_n(t_p) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_{k,n}(X) + b_k\beta_{k,n}(X),$$

where

$$\alpha_{k,n}(X) := \sum_{p=1}^{M} \lambda_p \cos\left(kX + \frac{kt_p}{n}\right), \quad \beta_{k,n}(X) := \sum_{p=1}^{M} \lambda_p \sin\left(kX + \frac{kt_p}{n}\right).$$

Due to the orthogonality of trigonometric functions, a straightforward computation then yields the following orthogonality relations, for all $1 \leq k \leq n$ and $1 \leq k' \leq n'$

$$\mathbb{E}_X\left[\alpha_{k,n}(X)\alpha_{k',n'}(X)\right] = \mathbb{E}_X\left[\beta_{k,n}(X)\beta_{k',n'}(X)\right] = \delta_{k,k'} \times \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \cos\left(\frac{kt_p}{n} - \frac{kt_q}{n'}\right),$$

and

$$\mathbb{E}_X\left[\alpha_{k,n}(X)\beta_{k',n'}(X)\right] = \delta_{k,k'} \times \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \sin\left(\frac{kt_p}{n} - \frac{kt_q}{n'}\right),$$

so that by symmetry

$$\mathbb{E}_X\left[\alpha_{k,n}(X)\beta_{k',n}(X)\right] = 0.$$

In particular, we have

$$\mathbb{E}_X\left[\alpha_{k,n}(X)^2\right] = \mathbb{E}_X\left[\beta_{k,n}(X)^2\right] \leq \frac{1}{2} \times ||\lambda||_1^2.$$

and

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}_X\left[(\alpha_{k,n}(X) - \alpha_{k,n'}(X))^2\right] \leq 2\pi||\lambda||_1^2\left|\dfrac{k}{n} - \dfrac{k}{n'}\right|, \\ \\ \mathbb{E}_X\left[(\beta_{k,n}(X) - \beta_{k,n'}(X))^2\right] \leq 2\pi||\lambda||_1^2\left|\dfrac{k}{n} - \dfrac{k}{n'}\right|. \end{array}\right. \tag{4.25}$$

Recall that m is a positive integer and n is defined as the unique integer such that $n^7 < m \leq (n+1)^7$. By triangular inequality and Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_{n^7}(X,t,\lambda)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X,t,\lambda)}\right]\right| &\leq \mathbb{E}_X\left[|Z_{n^7}(X,t,\lambda) - Z_m(X,t,\lambda)|\right] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_X[U^2]} + \sqrt{\mathbb{E}_X[V^2]} + \sqrt{\mathbb{E}_X[W^2]} \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} U &:= \left(\frac{1}{\sqrt{n^7}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n^7} a_k\alpha_{k,n^7}(X) + b_k\beta_{k,n^7}(X)\right), \\ V &:= \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{k=1+n^7}^{m} a_k\alpha_{k,m}(X) + b_k\beta_{k,m}(X)\right), \\ W &:= \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{k=1}^{n^7} a_k\left(\alpha_{k,n^7}(X) - \alpha_{k,m}(X)\right) + b_k\left(\beta_{k,n^7}(X) - \beta_{k,m}(X)\right)\right). \end{aligned}$$

Using the orthogonality relations above, and again Birkhoff–Khinchine Theorem, we have then

$$\mathbb{E}_X[U^2] \leq ||\lambda||_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n^7}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2 \sum_{k=1}^{n^7} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = ||\lambda||_1^2 \underbrace{\left(1 - \sqrt{\frac{n^7}{m}}\right)^2}_{O(1/n^2)} \underbrace{\left(\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}\right)}_{O(1)}.$$

In the same way and proceeding as in the proof of Lemma 4.3.4 above, we get

$$\mathbb{E}_X[V^2] \leq ||\lambda||_1^2 \times \frac{1}{m} \sum_{k=1+n^7}^{m} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finally, using again the orthogonality relations and Equation (4.48), we obtain

$$\mathbb{E}_X[W^2] \leq ||\lambda||_1^2 \times 4\pi \times \left(1 - \frac{n^7}{m}\right) \times \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n^7}(a_k^2 + b_k^2)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

As a conclusion, we get that

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_{n^7}(X,t,\lambda)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X,t,\lambda)}\right]\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{1/14}}\right).$$

hence the result. □

Therefore, we obtain that $\mathbb{P}-$almost surely, as m goes to infinity

$$\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X,t,\lambda)}\right] - e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[Z_m(X,t,\lambda)^2\right]} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0,$$

and by dominated convergence, using Equation (4.24), we can conclude that

$$\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X,t,\lambda)}\right] \xrightarrow[m\to+\infty]{} \mathbb{E}_X\left[\exp\left(-\frac{1}{2} \times 2\pi\,\psi_\rho(X) \sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \operatorname{sin}_c(t_p - t_q)\right)\right].$$

Tightness

The convergence of the finite marginals of g_n now established, in order to conclude that g_n converges in distribution for the $\mathcal{C}^1$ topology towards g_∞, we need to verify some tightness criteria for the $\mathcal{C}^1-$topology, which is the object of the following proposition.

Proposition 4.3.2. *Almost surely w.r.t. $\mathbb{P}$, the family of distributions under $\mathbb{P}_X$ of $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ for $n \geq 1$ is tight w.r.t. the $\mathcal{C}^1$ topology on $\mathcal{C}^1([0,2\pi])$.*

Proof. The strategy of the proof is the same as in Proposition 2 of [AP19], namely it is sufficient to establish a Lamberti-type criteria for $\mathbb{E}_X\,|g_n(t)-g_n(s)|^2$ and $\mathbb{E}_X\,|g_n'(t)-g_n'(s)|^2$. For sake of self-containedness, we recall the key elements of the proof. As detailed in Section (4.5.1), of the Appendix, Birkhoff–Khinchine Theorem ensures that

$$C(\omega) := \sup_{n\geq 1} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

is $\mathbb{P}-$almost surely bounded. Using orthogonality in $L^2([0,2\pi])$ for cosine and sine functions, we obtain that $\mathbb{P}$-almost surely, for all $s,t\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_X\,|g_n(t)-g_n(s)|^2 &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\sin^2\left(\frac{k}{2n}(t-s)\right) \leq C(\omega)|t-s|^2,\\
\mathbb{E}_X\,\left|g_n'(t)-g_n'(s)\right|^2 &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}(a_k^2+b_k^2)\sin^2\left(\frac{k}{2n}(t-s)\right) \leq C(\omega)|t-s|^2,
\end{aligned}$$

hence the result. □

4.4 From the limit theorems to the nodal asymptotics

In this section we shall establish Theorems 4.1.3 and 4.1.4 which show, under mild conditions on the spectral measure, the universal asymptotic behavior of the number of zeros, first in expectation and then almost surely. Note that, under the hypotheses of both Theorems, the spectral density ψ_ρ is assumed to be positive almost everywhere.

Let us start by recalling the following deterministic result, the proof of which consists in a simple Fubini argument between the empirical measure of the roots of a function f and the Lebesgue measure over $[0,2\pi]$. We refer to [AP19, Lemma 3] for more details.

Lemma 4.4.1. *Let X a random variable which is uniformly distributed over $[0,2\pi]$. Let us assume that f is a 2π-periodic function with a finite number of zeros in a period, then for any $0<h<2\pi$, we have*

$$\frac{h}{2\pi}\times\mathcal{N}(f,[0,2\pi]) = \mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}(f,[X,X+h])\right].$$

Applying Lemma 4.4.1 to f_n and $h=\frac{2\pi}{n}$, we obtain for X a uniform random variable on $[0,2\pi]$ which is independent of the sequences $(a_k)_{k\geq1}$ and $(b_k)_{k\geq1}$ that

$$\frac{\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}\left(f_n,\left[X,X+\frac{2\pi}{n}\right]\right)\right]. \tag{4.26}$$

The previous Equation (4.26) legitimates the introduction of the stochastic process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ defined by $g_n(t) := f_n\left(X+\frac{t}{n}\right)$, which is naturally the one studied in the last Section 4.3.3, given that we have

$$\frac{\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}\left(g_n,[0,2\pi]\right)\right]. \tag{4.27}$$

Indeed, one can then reasonably guess that the convergence of the random processes $\{g_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ in a suitable functional space will imply the convergence in law of the sequence of random variables $\{\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])\}_{n\geq 1}$.

Let us make this heuristics rigorous. The limit process g_∞, which is given by Theorem 4.1.6, may be interpreted as a stationary Gaussian process with correlation $\sin_c$ multiplied by a random and independent amplitude given by $\sqrt{\psi_\rho(X)}$. As mentioned above, under the assumptions of Theorems (4.1.3) and (4.1.4), $\psi_\rho(X) > 0$ almost surely. Given that the stationary Gaussian process with correlation $\sin_c$ is non degenerated, we derive that the limit process g_∞ is non degenerated as well. Hence,

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X\text{-a.s., } \forall t \in [0, 2\pi],\ |g_\infty(t)| + |g'_\infty(t)| > 0. \tag{4.28}$$

On the other hand, one has the following deterministic result, which ensures the continuity of the number of roots with respect to $\mathcal{C}^1$ topology provided that the limit is non degenerated.

$$\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{C}^1([0,2\pi])} u \\ \\ \inf_{t\in[0,2\pi]} \left(|u(t)| + |u'(t)|\right) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Card}\left(u_n^{-1}(\{0\}) \cap [0, 2\pi]\right) \to \text{Card}\left(u^{-1}(\{0\}) \cap [0, 2\pi]\right). \tag{4.29}$$

Combining Theorem (4.1.6), the $\mathcal{C}^1$ continuity (4.29) of the number of zeros and the non-degeneracy of g_∞ given by (4.28), together with the continuous mapping Theorem implies the following proposition which will be central in our forthcoming proofs.

Proposition 4.4.1. *Consider the localized process* $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]} := \left(f_n\left(X + \frac{t}{n}\right)\right)_{t\in[0,2\pi]}$

(a) $\mathbb{P}$*-almost surely, as* n *goes to infinity,* $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ *converges in distribution under* $\mathbb{P}_X$ *towards* $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$*.*

(b) As n *goes to infinity, the number of zeros* $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ *converges in distribution under* $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X$ *towards* $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$*.*

Note that assertion (b) is a direct consequence of assertion (a) as it is sufficient to integrate it with respect to $\mathbb{P}$ and pass to the limit. Indeed, if h is a continuous and bounded test function and as n goes to infinity we have

$$\mathbb{E}_X\left[h\left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])\right)\right] \to \mathbb{E}_X\left[h\left(\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])\right)\right],$$

then by dominated converge, we have also

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[h\left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])\right)\right] \to \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[h\left(\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])\right)\right].$$

4.4.1 Study of the mean number of real zeros of f_n.

The object of this section is to give the proof of Theorem 4.1.3, which, thanks to Equation (4.27), turns out to be equivalent to showing that

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])\right]. \tag{4.30}$$

We stress the fact that here, no condition is required on the singular component μ_ρ^s of the spectral measure μ_ρ. In order to obtain the convergence of the first moment in the equation (4.30), the convergence in distribution given by the Proposition 4.4.1 under $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X$ is not sufficient. We need to prove some equi-integrability condition. To achieve this, we first aim at proving some logarithmic moment estimates for $f_n(X)=g_n(0)$.

Lemma 4.4.2. *Let $\gamma>1$. If $\log(\psi_\rho)\in L^\gamma$, there exists a constant $C_\gamma>0$ such that uniformly on $n\geq 1$, we have*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\log(|f_n(X)|)\right|^\gamma \leq C_\gamma(1+\|\log(\psi_\rho)\|_{L^\gamma}).$$

Proof. Notice that, conditionally on X, $f_n(X)$ is a centered Gaussian variable whose variance under $\mathbb{P}$ is given by $\mathbb{E}[f_n(X)^2]=2\pi\, K_n*\mu_\rho(X)$. Since $K_n*\mu_\rho(X)\geq K_n*\psi_\rho(X)>0$, $\mathbb{P}_X$-almost surely, we have

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\log(|f_n(X)|)\right|^\gamma \leq C_\gamma\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\log\left(\left|\frac{f_n(X)}{\sqrt{K_n*\mu_\rho(X)}}\right|\right)\right|^\gamma+\mathbb{E}_X\left|\log(K_n*\mu_\rho(X)\right|^\gamma\right).$$

Now, for every fixed X, under $\mathbb{P}$, $\frac{f_n(X)}{\sqrt{K_n*\mu_\rho(X)}}$ is a standard Gaussian variable hence by Fubini inversion

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\log\left(\left|\frac{f_n(X)}{\sqrt{K_n*\mu_\rho(X)}}\right|\right)\right|^\gamma=\kappa_\gamma<+\infty.$$

To finish the proof, one is left to control the term $\mathbb{E}_X\left|\log(K_n*\psi_\rho(X)\right|^\gamma$.

— Assume first that $K_n*\mu_\rho(X)\in(0,1]$. Since $|\log(\cdot)|$ is non increasing on $(0,1]$,

$$\left|\log(K_n*\mu_\rho(X))\right|=\left|\log\left(K_n*\psi_\rho(X)+K_n*\mu_s(X)\right)\right|\leq|\log(K_n*\psi_\rho(X))|.$$

Our assumption implies that $K_n*\psi_\rho(X)\in(0,1]$, hence by Jensen inequality, we have

$$\log(K_n*\psi_\rho(X))\geq K_n*\log(\psi_\rho)(X).$$

As a result, we obtain that

$$|\log(K_n*\psi_\rho(X)|^\gamma \overbrace{\leq}^{\substack{x\mapsto|x|^\gamma\text{decreases on }\mathbb{R}^-\\ K_n*\psi_\rho(X)<1}} |K_n*\log(\psi_\rho)(X)|^\gamma \overbrace{\leq}^{\text{convexity of }x\mapsto|x|^\gamma} K_n*|\log(\psi_\rho)|^\gamma(X).$$

— Assume now that $K_n*\mu_\rho(X)>1$. There exists a constant C_γ such that $|\log(x)|^\gamma\leq C_\gamma|x|$ on $[1,+\infty[$ and thus

$$\left|\log(K_n*\mu_\rho(X))\right|^\gamma\leq C_\gamma K_n*\mu_\rho(X).$$

Putting everything together,

$$|\log(K_n * \mu_\rho(X))|^\gamma \leq C_\gamma \left(K_n * \mu_\rho(X) + K_n * |\log(\psi_\rho)|^\gamma(X)\right).$$

and taking the expectation w.r.t. $\mathbb{P}_X$ in the previous inequality, we obtain the following estimate which is uniform on $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_X \left|\log(K_n * \psi_\rho(X))\right|^\gamma &\leq C_\gamma \left(1 + \mathbb{E}_X \left[K_n * \left|\log(\psi_\rho)\right|^\gamma (X)\right]\right) \\ &\leq C_\gamma (1 + \|\log(\psi_\rho)\|_{L^\gamma}) \end{aligned}$$

□

Let us now see how the previous logarithmic estimate can be used to obtain some moment estimates for the number of zeros of g_n, that is to say for $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$.

Proposition 4.4.2. *Let $\eta > 0$. If $\log(\psi_\rho) \in L^{1+\eta}$, we have*

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta/2}\right] < +\infty.$$

Proof. We have classically

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])^{1+\eta/2}\right] = (1 + \eta/2) \int_0^{+\infty} s^{\eta/2} \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > s\right) ds.$$

By iterating Rolle Lemma $\lfloor s \rfloor$ times, we have

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > s\right) \leq \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(|g_n(0)| \leq \frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor}}{\lfloor s \rfloor !} \|g_n^{(\lfloor s \rfloor)}\|_\infty\right),$$

so that for any $R > 0$,

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > s\right) \leq \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(|g_n(0)| \leq \frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor} R}{\lfloor s \rfloor !}\right) + \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\|g_n^{(\lfloor s \rfloor)}\|_\infty > R\right). \tag{4.31}$$

Applying Markov inequality, we get

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\|g_n^{(\lfloor s \rfloor)}\|_\infty > R\right) \leq \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \|g_n^{(\lfloor s \rfloor)}\|_\infty^2}{R^2}.$$

Using L^2-Sobolev embedding, we can compare the uniform norm with the norm $\|\cdot\|_2$ of $L^2([0, 2\pi])$ of the derivatives, more precisely

$$\mathbb{E}_X \|g_n^{(\lfloor s \rfloor)}\|_\infty^2 \leq C \left(\mathbb{E}_X \|g_n^{(\lfloor s \rfloor)}\|_2^2 + \mathbb{E}_X \|g_n^{(\lfloor s \rfloor + 1)}\|_2^2\right).$$

But for each $\ell \geq 1$, since for (X, Y) uniformly distributed on $[0, 2\pi]$ and independent we have $X + \frac{Y}{n} \sim X$, we deduce that

$$\mathbb{E}_X \|g_n^{(\ell)}\|_2^2 = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{2\ell} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2),$$

which yields that

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\|g_n^{(s)}\|_2^2 \le 1.$$

Hence

$$\sup_{n\ge 1}\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\|g_n^{(\lfloor s\rfloor)}\|_\infty > R\right) \le \frac{1}{R^2}. \tag{4.32}$$

We can choose $R(s) = (1+|s|)^{\eta/2+1}$.

On the other hand, supposing that for s large enough, $\frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}R}{\lfloor s\rfloor!} < 1$, we get by Markov inequality that

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|g_n(0)| \le \frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}R}{\lfloor s\rfloor!}\right) &= \mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|f_n(X)| \le \frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}R}{\lfloor s\rfloor!}\right)\\
&= \mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|\log|f_n(X)|| \ge \left|\log\left(\frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}R}{\lfloor s\rfloor!}\right)\right|\right)\\
&\le \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[|\log(|f_n(X)|)|^{1+\eta}\right]}{\left|\log\left(\frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}R(s)}{\lfloor s\rfloor!}\right)\right|^{1+\eta}} \le \frac{C_\eta(1+\|\log(\psi_\rho)^{1+\eta}\|_{L^1})}{\left|\log\left(\frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}R(s)}{\lfloor s\rfloor!}\right)\right|^{1+\eta}}.
\end{aligned}$$

Hence, for all $\eta > 0$ and s large enough,

$$\sup_{n\ge 1}\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|g_n(0)| \le\right) = O\left(\left|\frac{1}{\lfloor s\rfloor\log(\lfloor s\rfloor)}\right|^{1+\eta}\right). \tag{4.33}$$

Combining Equations (4.31), (4.32) and (4.33), we thus get that

$$\sup_{n\ge 1}\int_0^{+\infty} s^{\eta/2}\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi]) > s\right)ds < +\infty,$$

hence the result. □

We can now complete the proof of Theorem 4.1.3. Indeed, Combining the last Proposition 4.4.2 of equi-integrability with the convergence in distribution established earlier in Proposition 4.4.1, we obtain the convergence of the first moment:

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\frac{\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])}{n}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi])].$$

Now, recall that $g_\infty(\cdot) = \sqrt{\psi_\rho(X)}N(\cdot)$ with X uniformly distributed on $[0,2\pi]$ and N a stationary Gaussian process with $\sin_c$ covariance function that is independent of X. Since $\psi_\rho > 0$ almost surely, the zeros of g_∞ are the same as the ones of $N(\cdot)$. A simple us of Kac–Rice formula for $(N(t))_{t\in\mathbb{R}}$ then implies that

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi])] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathcal{N}(N,[0,2\pi])\right] = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

which concludes the proof.

4.4.2 Study of the almost-sure number of real zeros of f_n

In this last section, we reinforce the hypotheses on the spectral density to pass from the convergence in expectation stated in Theorem 4.1.3 to the almost sure convergence stated in Theorem 4.1.4. We suppose this time that μ_ρ is purely absolutely continuous i.e. $\mu_\rho(dx) = \psi_\rho(x)dx$ and that the spectral density satisfies the following conditions.

A.1 There exists $\alpha \in (0,1]$ such that ψ_ρ verifies a Besov condition of order $\alpha > 0$ i.e. for $\delta > 0$,

$$\omega^*(\psi_\rho, \delta) := \sup_{|h|\leq\delta} \|\psi_\rho(\cdot + h) + \psi_\rho(\cdot - h) - 2\psi_\rho(\cdot)\|_{L^1([0,2\pi])} = O(\delta^\alpha).$$

A.2 There exists $\gamma > 0$ such that $\frac{1}{\psi_\rho^\gamma} \in L^1([0,2\pi])$.

In order to ease the reading of the proof of Theorem 4.1.4, let us describe below the main steps of the argumentation.

Sketch of the proof of Theorem 4.1.4:

(1) The point a) of Proposition 4.4.1 ensures that $\mathbb{P}$-almost surely, we have

$$\mathcal{N}(g_n, [0,2\pi]) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Law under } \mathbb{P}_X} \mathcal{N}(g_\infty, [0,2\pi]).$$

(2) As in the proof of Theorem 4.1.3, the previous convergence is not sufficient to take the limit as $n \to \infty$ in the expectation $\mathbb{E}_X$. Like before, one seeks to establish that

$$\mathbb{P}\text{-a.s.}, \exists \eta > 1, \sup_n \mathbb{E}_X\left(|\log(f_n(X)|\right) < C_{\eta,\omega}.$$

Unfortunately, Lemma 4.4.2 does not apply here since we consider only the expectation with respect to $\mathbb{P}_X$ in the above estimate. To circumvent this issue we proceed in two distinct steps. We first show that

$$\forall \eta > 0,\ \forall \theta > 0,\ \mathbb{P}\text{-a.s.},\ \exists C_{\eta,\theta,\omega} > 0 \text{ s.t. } \forall n \geq 1,\ \mathbb{E}_X\left[|\log(f_n(X))|^{1+\eta}\right] \leq C_{\eta,\theta,\omega} n^\theta.$$

In other words, almost surely, the quantity $\mathbb{E}_X\left[|\log(f_n(X))|^{1+\eta}\right]$ grows slower than any polynomial. When studying the uniform integrability with respect to $\mathbb{P}_X$ of $\mathcal{N}(g_n, [0,2\pi])$ we can make the following truncation at $s = n^\lambda$ for a suitable $\lambda > 0$ (which depends on the Besov regularity of ψ_ρ in the assumption A.1.)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}(g_n, [0,2\pi])^{1+\eta/2}\right] &= (1+\eta/2)\int_0^{+\infty} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi]) > s\right) ds \\
&= \underbrace{(1+\eta/2)\int_0^{n^\lambda} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi]) > s\right) ds}_{:=I_1} \\
&+ \underbrace{(1+\eta/2)\int_{n^\lambda}^{\infty} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi]) > s\right) ds}_{:=I_2}.
\end{aligned}$$

Then, the integral I_2 will be handled using an almost sure small enough polynomial growth of $\mathbb{E}_X\left[|\log(f_n(X))|^{1+\eta}\right]$ and the integral I_1 will be handled using a quantitative convergence in distribution in Theorem 4.1.5.

Remark that Assumption **A.2** is sharper than the previous assumption on the log-integrability of the spectral density ψ_ρ. Indeed, we have the following Lemma.

Lemma 4.4.3. *If* $\frac{1}{\psi_\rho} \in L^\gamma([0,2\pi])$ *for some* $\gamma > 0$*, then for all* $r > 1$*,* $\log(\psi_\rho) \in L^r([0,2\pi])$*.*

Proof. Set $r > 1$, since $|x|^\gamma |\log(x)|^r \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, for some constant $C_{r,\gamma}$ one gets get

$$\forall x \in]0,1[,\ |\log(x)|^r \leq \frac{C_{r,\gamma}}{|x|^\gamma}.$$

Besides, if $|x| > 1$ we also have $|\log(x)|^r \leq C_r|x|$ which gives in turn

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ |\log(x)|^r \leq |x|.$$

Gathering the two previous estimates leads to

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ |\log(\psi_\rho(x))|^r \leq \frac{C_{r,\gamma}}{\psi_\rho(x)^\gamma} + C_r|\psi_\rho|.$$

The right hand side of the above inequality being integrable, the proof is complete. □

Lemma 4.4.4. *For n large enough, then for all* $\eta > 0$*,* $\mathbb{P}$*-almost surely, for all* $\theta \in (0,1)$*, there exists a constant* $C(\omega,\eta,\theta)$ *such that*

$$\mathbb{E}_X|\log(|f_n(X)|)|^{1+\eta} \leq C(\omega,\eta,\theta)n^\theta.$$

Proof. Our approach uses Borel–Cantelli Lemma once again. Set $\beta > \theta^{-1} > 1$ such that $(1+\eta)\beta > 1$. Lemma 4.4.2 and Jensen inequality ensure that

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\log(|f_n(X)|)\right|^{(1+\eta)\beta} \leq C(\eta,\beta,\|\log(\psi_\rho)^{(1+\eta)\beta}\|_{L^1}).$$

Then , Markov inequality coupled with Jensen inequality, gives that for $\beta > \frac{1}{\theta}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\mathbb{E}_X\left|\log(|f_n(X)|)\right|^{1+\eta} \geq n^\theta\right) &\leq \frac{1}{n^{\theta\beta}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_X\left[\left|\log(|f_n(X)|)\right|^{1+\eta}\right]^\beta\right] \\
&\leq \frac{1}{n^{\theta\beta}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\log(|f_n(X)|)\right|^{(1+\eta)\beta} \\
&\leq \frac{C(\eta,\beta,\|\log(\psi_\rho)^{(1+\eta)\beta}\|_{L^1})}{n^{\theta\beta}}.
\end{aligned}$$

Since $\theta\beta > 1$, the series $\sum_n \frac{1}{n^{\theta\beta}}$ is convergent. Therefore, by Borel–Cantelli Lemma with respect to $\mathbb{P}$, for n sufficiently large, we have $\mathbb{P}$-almost surely that

$$\mathbb{E}_X\left[\left|\log(|f_n(X)|)\right|^{1+\eta}\right] \leq C(\eta,\theta,\omega)n^\theta.$$

□

We can now complete the proof of Theorem 4.1.4. Following the steps of the proof of Proposition 4.4.2, we must show that for some $\eta > 0$,

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_X \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\frac{\eta}{2}} \right] < +\infty. \tag{4.34}$$

Combining this equi-integrability result with the convergence in distribution established in Theorem 4.1.6, we shall obtain that $\mathbb{P}$ almost surely

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])\right].$$

Now, as in the proof of Theorem 4.1.3, the zeros of g_∞ are the same as the ones of a stationary Gaussian process with $\sin_c$ covariance function, therefore we will indeed obtain that $\mathbb{P}$ almost surely

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Let us now focus on the proof of the uniform estimate (4.34). To do so, we consider $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty$, by Fourier inversion we may write

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_X \left[\chi\left(f_n(X)\right)\right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(\xi) \mathbb{E}_X \left[\exp\left(-i\xi f_n(X)\right)\right] d\xi \\
\mathbb{E}_{X,N} \left[\chi\left(\sqrt{2\pi\, K_n * \psi_\rho(X)} N\right)\right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(\xi) \mathbb{E}_X \left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{2} 2\pi\, K_n * \psi_\rho(X)\right)\right] d\xi \\
\mathbb{E}_{X,N} \left[\chi\left(\sqrt{2\pi\, \psi_\rho(X)} N\right)\right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(\xi) \mathbb{E}_X \left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{2} 2\pi\, \psi_\rho(X)\right)\right] d\xi
\end{aligned}$$

Subtracting the two first equations and using Cauchy–Schwarz inequality entails that

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E}_X \left[\chi\left(f_n(X)\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N} \left[\chi\left(\sqrt{2\pi\, K_n * \psi_\rho(X)} N\right)\right] \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\chi}(\xi)| \left| \mathbb{E}_X \left[e^{-i\xi f_n(X)}\right] - \mathbb{E}_X \left[e^{-i\frac{\xi^2}{2} 2\pi\, K_n * \psi_\rho(X)}\right] \right| d\xi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\hat{\chi}(\xi)|^2 (|\xi|^2+1)^2 d\xi} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \mathbb{E}_X \left[e^{-i\xi f_n(X)}\right] - \mathbb{E}_X \left[e^{-i\frac{\xi^2}{2} 2\pi\, K_n * \psi_\rho(X)}\right] \right|^2}{(|\xi|^2+1)^2} d\xi}.
\end{aligned}$$

Taking the expectation with respect to $\mathbb{P}$, recalling that (see the beginning of Section 4.3.2)

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \forall n \geq 1,\, \mathbb{E}\left[\left| \mathbb{E}_X \left[e^{itf_n(X)}\right] - \mathbb{E}_X \left[e^{-\frac{t^2}{2} 2\pi\, K_n * \mu_\rho(X)}\right] \right|^2 \right] \leq C \frac{t^2}{n^{\frac{1}{6}}},$$

and noticing that $\mu_\rho = \psi_\rho(x)dx \;\Rightarrow K_n * \mu_\rho = K_n * \psi_\rho$ we get that

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\mathbb{E}_X\left[e^{-i\xi f_n(X)}\right]-\mathbb{E}_X\left[e^{-i\frac{\xi^2}{2}2\pi\, K_n*\psi_\rho(X)}\right]\right|^2}{(|\xi|^2+1)^2}d\xi}\right]\leq\frac{C}{n^{\frac{1}{12}}}\sqrt{\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{|\xi|^2}{(|\xi|^2+1)^2}d\xi\right]}=\frac{\tilde{C}}{n^{\frac{1}{12}}}.$$

As a a result, along the subsequence n^{25}, one deduces that

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{25}{24}}\mathbb{E}\left[\sqrt{\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\mathbb{E}_X\left[e^{-i\xi f_{n^{25}}(X)}\right]-\mathbb{E}_X\left[e^{-i\frac{\xi^2}{2}2\pi\, K_{n^{25}}*\psi_\rho(X)}\right]\right|^2}{(|\xi|^2+1)^2}d\xi}\right]<\infty.$$

Thus, by a Borel–Cantelli argument we derive that, $\mathbb{P}$ almost surely, for some constant $C(\omega)>0$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|\mathbb{E}_X\left[e^{-i\xi f_{n^{25}}(X)}\right]-\mathbb{E}_X\left[e^{-i\frac{\xi^2}{2}2\pi K_{n^{25}}*\psi_\rho(X)}\right]\right|^2}{(|\xi|^2+1)^2}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C(\omega)}{n^{\frac{25}{24}}}. \tag{4.35}$$

On the other hand, using Plancherel isometry, provided that $\mathrm{Supp}(\chi)\subset[-M,M]$, we have

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|\hat{\chi}(\xi)|^2(|\xi|^2+1)^2d\xi &= \int_{\mathbb{R}}|\hat{\chi}(\xi)|^2(|\xi|^4+2|\xi|^2+1)d\xi\\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}}\left(\chi''(x)^2+\chi'(x)^2+\chi(x)^2\right)dx\\ &\leq 2M\left(\|\chi''\|_\infty^2+\|\chi'\|_\infty^2+\|\chi\|_\infty^2\right).\end{aligned}$$

Gathering this last estimate with (4.35) entails that, for any $\chi\in\mathcal{C}_c^\infty$ such that

— $\max\left(\|\chi'''\|_\infty,\|\chi''\|_\infty,\|\chi'\|_\infty,\|\chi\|_\infty\right)\leq 1$,

— $\mathrm{Supp}(\chi)\subset[-M,M]$,

then we have

$$\left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_{n^{25}}(X)\right)\right]-\mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\sqrt{2\pi K_{n^{25}}*\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right|\leq\frac{C(\omega)}{n^{\frac{25}{24}}}\sqrt{M}. \tag{4.36}$$

Given the assumption A.1 on the Besov regularity of ψ_ρ, since the first Fourier coefficient of the Fejér kernel of order n is equal to $1-\frac{1}{n}$, we can apply Theorem 1.5.8 p.69-70 of [BN71], with the corresponding notations $\chi_p(u)=K_n(u)$, $\hat{\chi}_p(u)=1-\frac{1}{n}$ and $\omega^*(X_{2\pi},f,h)=\mathrm{O}(h^\alpha)$, to deduce that

$$\|K_n*\psi_\rho-\psi_\rho\|_{L^1([0,2\pi])}=O(n^{-\alpha/2}).$$

Under the condition A.1, we have thus

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(\sqrt{2\pi\, K_{n^{25}} * \psi_\rho(X)}N\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\chi}(\xi)| \left|\mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{\xi^2}{2}2\pi\, K_{n^{25}} * \psi_\rho(X)}\right] - \mathbb{E}\left[e^{-\frac{\xi^2}{2}2\pi\,\psi_\rho(X)}\right]\right| d\xi \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\chi}(\xi)|\xi^2 d\xi \ \times\ \mathbb{E}_X\left[|K_{n^{25}} * \psi_\rho(X) - \psi_\rho(X)|\right] \\
\leq\ & \frac{C\times\sqrt{M}}{n^{\frac{25\alpha}{2}}}.
\end{aligned}$$

Indeed, as previously one may write

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\chi}(\xi)|\xi^2 d\xi \quad & = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\chi}(\xi)|\xi^2 \frac{|\xi|+1}{|\xi|+1} d\xi \\
& \leq \quad \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\chi}(\xi)|^2\xi^4(1+|\xi|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(|\xi|+1)^2} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \overset{\text{Plancherel}}{\leq} \quad C\left(\int_{\mathbb{R}} \left(|\chi'''(x)|^2 + |\chi''(x)|^2 + |\chi'(x)|^2 + |\chi(x)|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \quad C\sqrt{M}.
\end{aligned}$$

Gathering the latter with (4.36) provides

$$\left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_{n^{25}}(X)\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right| \leq \left(\frac{C(\omega)}{n^{\frac{25}{24}}} + \frac{C}{n^{\frac{25\alpha}{2}}}\right)\sqrt{M}. \qquad (4.37)$$

Now, take $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty$ with the condition $\max\left(\|\chi'''\|_\infty, \|\chi''\|_\infty, \|\chi'\|_\infty, \|\chi\|_\infty\right) \leq 1$ but not necessarily supported in $[-M, M]$. We can build $\tau_M \in \mathcal{C}_c^\infty$ with the conditions

— $\tau_M = 1$ on $[-M+1, M-1]$,

— $\tau_M = 0$ on $[-M, M]^c$,

— $0 \leq \tau_M \leq 1$ and $\max(\|\tau_M'''\|_\infty, \|\tau_M''\|_\infty, \|\tau_M'\|_\infty, \|\tau_M\|_\infty) \leq C$ for some absolute $C > 0$ and any $M > 1$.

We then write $\chi_M = \chi \times \tau_M$ and we obtain

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_{n^{25}}(X)\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}_X\left[\chi_M\left(f_{n^{25}}(X)\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi_M\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right| \\
&+ \left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_{n^{25}}(X)\right)\right] - \mathbb{E}_X\left[\chi_M\left(f_{n^{25}}(X)\right)\right]\right| \\
&+ \left|\mathbb{E}_{X,N}\left[\chi_M\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right| \\
&\leq \left(\frac{C(\omega)}{n^{\frac{25}{24}}} + \frac{C}{n^{\frac{25\alpha}{2}}}\right)\sqrt{M} + \mathbb{P}_X\left(|f_{n^{25}}(X)| > M\right) + \mathbb{P}_X\left(\left|\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right| > M\right).
\end{aligned}$$

Besides, combining Markov inequality with Birkhoff–Khinchine Theorem (see Section 4.5.1 below)

$$\mathbb{P}_X\left(|f_{n^{25}}(X)| > M\right) \leq \frac{1}{M^2}\frac{1}{n^{25}}\sum_{k=1}^{n^{25}}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} = O(1/M^2),$$

and using Markov inequality again

$$\mathbb{P}_X\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N > M\right) \leq \frac{2\pi}{M^2}\mathbb{E}_{X,N}\left[\psi_\rho(X)N^2\right] = \frac{1}{M^2}.$$

We finally gets, for some constant $C(\omega)$, for every $M>0$ and every $\chi\in\mathcal{C}_c^\infty$ which satisfies $\max\left(\|\chi'''\|_\infty, \|\chi''\|_\infty, \|\chi'\|_\infty, \|\chi\|_\infty\right)\leq 1$:

$$\left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_{n^{25}}(X)\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right| \leq \frac{C(\omega)}{M^2} + \sqrt{M}\frac{C(\omega)}{n^\beta}, \tag{4.38}$$

where $\beta = \min\left(\frac{25}{24}+\frac{25\alpha}{2}\right)$. On the other hand, relying on the proof of Lemma 4.3.4 (with the subsequence n^7 replaced by n^{25}) we may infer for $n^{25}\leq m\leq (n+1)^{25}$ that

$$\mathbb{E}_X\left[\left|f_{n^{25}}(X) - f_m(X)\right|^2\right] \leq \frac{C(\omega)}{n}.$$

Thus we also have

$$\left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_{n^{25}}(X)\right)\right] - \mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_m(X)\right)\right]\right| \leq \frac{C(\omega)}{\sqrt{n}}.$$

Combining the latter with (4.38) ensures that,

$$\left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_m(X)\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right| \leq C(\omega)\left(\frac{1}{M^2} + \sqrt{M}\frac{1}{m^{\frac{\beta}{25}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{50}}}\right). \tag{4.39}$$

Setting $\theta = \min\left(\frac{\beta}{25}, \frac{1}{50}\right)$ and optimizing in $M>0$ implies that $\mathbb{P}$-a.s. there exists a constant $C(\omega)>0$ such that for any $n\geq 1$ and any $\chi\in\mathcal{C}_c^\infty$ with $\max\left(\|\chi''\|_\infty, \|\chi'\|_\infty, \|\chi\|_\infty\right)\leq 1$:

$$\left|\mathbb{E}_X\left[\chi\left(f_m(X)\right)\right] - \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\right)\right]\right| \leq \frac{C(\omega)}{m^{\frac{4\theta}{5}}}. \tag{4.40}$$

Now, let us assume that $0\leq\chi\leq 1$, $\chi=1$ on $[-1,1]$ and $\chi=0$ on $\mathbb{R}/[-2,2]$. In particular, we have $\mathbb{1}_{[-2,2]}\geq\chi\geq\mathbb{1}_{[-1,1]}$. Let $\delta>0$ that will be chosen later. We apply the estimate (4.39) to $\chi\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)$ for which one may write $\max\left(\|\chi^{(i)}\|_\infty\,;\, i\in\{0,1,2,3\}\right)\leq\frac{C}{\delta^3}$ and we obtain that

$$\mathbb{P}_X\left(|f_n(X)|\leq\delta\right) \;\leq\; \mathbb{E}_X\left[\chi\left(\frac{f_n(X)}{\delta}\right)\right]\leq \mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\frac{\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N}{\delta}\right)\right]+\frac{C(\omega)}{\delta^3 n^{\frac{4\theta}{5}}}.$$

On the other hand, by the assumption A.2 we know that $\frac{1}{\psi_\rho}\in L^\gamma([0,2\pi]$ which entails that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\frac{\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N}{\delta}\right)\right] &\leq \mathbb{P}_{X,N}\left(\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N\leq 2\delta\right)\\
&= \mathbb{P}_X\left(\lambda\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}\leq 2\delta\right)+C\lambda\\
&= \mathbb{P}_X\left(2\pi\,\psi_\rho(X)^\gamma\leq\left(\frac{2\delta}{\lambda}\right)^{2\gamma}\right)+C\lambda\\
&\leq C\lambda+\mathbb{E}_X\left[\frac{1}{2\pi\,\psi_\rho(X)^\gamma}\right]\left(\frac{2\delta}{\lambda}\right)^{2\gamma}.
\end{aligned}$$

Optimizing in λ gives for some constant $C>0$ and any $\delta>0$ the following estimate

$$\mathbb{E}_{X,N}\left[\chi\left(\frac{\sqrt{2\pi\,\psi_\rho(X)}N}{\delta}\right)\right]\leq C\delta^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}}. \tag{4.41}$$

Gathering the bounds (4.40) and (4.39) gives the bound

$$\mathbb{P}\text{-a.s., }\exists C(\omega)>0,\text{ s.t. }\forall\delta>0,\ \mathbb{P}_X\left(|f_n(X)|\leq\delta\right)\leq C\delta^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}}+\frac{C(\omega)}{\delta^3 n^{\frac{4\theta}{5}}}. \tag{4.42}$$

The rest of the proof follows the same strategy as in the proof of Theorem 4.1.3. Namely we write, for some $\lambda>0$ to be determined later

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])^{1+\eta/2}\right] &= (1+\eta/2)\int_0^{+\infty}s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>s\right)ds\\
&= (1+\eta/2)\int_0^{n^\lambda}s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>s\right)ds\\
&+ (1+\eta/2)\int_{n^\lambda}^{\infty}s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>s\right)ds. \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

Then we write, using again repeatedly the Rolle Theorem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>s\right) &\leq \mathbb{P}_X\left(|g_n(0)|\leq\frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}}{\lfloor s\rfloor!}\|g_n^{(\lfloor s\rfloor)}\|_\infty\right)\\
&\leq \mathbb{P}_X\left(|g_n(0)|\leq\frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}}{\lfloor s\rfloor!}M\right)\\
&\quad+\mathbb{P}_X\left(\|g_n^{(\lfloor s\rfloor)}\|_\infty\geq M\right).
\end{aligned}$$

Besides, via Sobolev estimates, and using the orthogonality of $(\cos(kX), \sin(kX))$ with respect to the Lebesgue measure on $[0, 2\pi]$ we obtain that

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X\left(\|g_n^{(\lfloor s \rfloor)}\|_\infty \geq M\right) &\leq \frac{1}{M^2}\left(\mathbb{E}_X\left[g_n^{\lfloor s \rfloor}(X)^2\right] + \mathbb{E}_X\left[g_n^{\lfloor s+1 \rfloor}(X)^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{M^2}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{2\lfloor s \rfloor} + \left(\frac{k}{n}\right)^{2\lfloor s+1 \rfloor}\right)\left(\frac{a_k^2 + b_k^2}{2}\right) \\
&\leq \frac{C(\omega)}{M^2}.
\end{aligned}$$

where the last inequality is again due to Birkhoff–Khinchine Theorem. Together, the two previous bounds imply that

$$\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > s\right) \leq \frac{C(\omega)}{M^2} + \mathbb{P}_X\left(|g_n(0)| \leq \frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor}}{\lfloor s \rfloor!} M\right) \tag{4.44}$$

Now, we can choose $M(s) = (1 + |s|)^{\eta/2+1}$ and notice that, for s large enough, $\frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor} M(s)}{\lfloor s \rfloor!} < 1$. As a result, provided that s is large enough, we get by Markov inequality and the fact that $x \mapsto |\log(x)|$ decreases on $]0, 1[$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X\left(|g_n(0)| \leq \frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor} M(s)}{\lfloor s \rfloor!}\right) &= \mathbb{P}_X\left(|f_n(X)| \leq \frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor} M(s)}{\lfloor s \rfloor!}\right) \\
&= \mathbb{P}_X\left(|\log|f_n(X)|| \geq \left|\log\left(\frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor} M(s)}{\lfloor s \rfloor!}\right)\right|\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}_X\left[|\log(|f_n(X)|)|^{1+\eta}\right]}{\left|\log\left(\frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor} M(s)}{\lfloor s \rfloor!}\right)\right|^{1+\eta}}.
\end{aligned}$$

Now, we rely on Lemma 4.4.4 which guarantees that for some constant $C(\omega) > 0$ and $\epsilon > 0$ small enough we have

$$\forall n \geq 1,\, \mathbb{E}_X|\log(|f_n(X)|)|^{1+\eta} \leq C(\omega, \epsilon) n^\epsilon.$$

Hence, for all $\eta > 0$ and s large enough, (and recalling that $g_n(0) = f_n(X)$) we get

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}_X\left(|f_n(X)| \leq \frac{(2\pi)^{\lfloor s \rfloor} M(s)}{\lfloor s \rfloor!}\right) \leq \frac{C(\omega, \eta) n^\epsilon}{s^{1+\eta}}. \tag{4.45}$$

Plugging the estimate (4.45) inside (4.44) ensures that, for s large enough, $\mathbb{P}$-a.s.,

$$\forall n \geq 1,\, \mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > s\right) \leq \frac{C(\omega)}{(1+s)^{2+\eta}} + \frac{C(\omega, \eta) n^\epsilon}{s^{1+\eta}}. \tag{4.46}$$

Now we combine (4.46) and (4.43) and we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_X\left[\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])^{1+\eta/2}\right] &= (1+\eta/2)\int_0^{+\infty} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>s\right)ds\\
&= (1+\eta/2)\int_0^{n^\lambda} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>s\right)ds\\
&+ (1+\eta/2)\int_{n^\lambda}^{\infty} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>s\right)ds\\
&\le (1+\eta/2)\int_0^{n^\lambda} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(|f_n(X)|\le \frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}M(s)}{\lfloor s\rfloor!}\right)ds\\
&\overset{(4.46)}{+} (1+\eta/2)\int_{n^\lambda}^{\infty} s^{\eta/2}\left(\frac{C(\omega)}{(1+s)^{2+\eta}}+\frac{C(\omega,\eta)n^\epsilon}{s^{1+\eta}}\right)ds.
\end{aligned}$$

Then, in view of using the estimate (4.42) we set a_n the least positive number such that

$$s>a_n \Rightarrow \frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}M(s)}{\lfloor s\rfloor!}\le \frac{1}{n^{\frac{\theta}{5}}}.$$

Due to the growth of the term $\lfloor s\rfloor!$ it is clear that for n large enough we have $a_n<n^\lambda$.

$$\begin{aligned}
&I := \int_0^{n^\lambda} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(|f_n(X)|\le \frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}M(s)}{\lfloor s\rfloor!}\right)ds\\
&= \int_0^{a_n} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(|f_n(X)|\le \frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}M(s)}{\lfloor s\rfloor!}\right)ds + \int_{a_n}^{n^\lambda}\mathbb{P}_X\left(|f_n(X)|\le \frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}M(s)}{\lfloor s\rfloor!}\right)\\
&\le \int_0^{a_n} s^{\eta/2}\mathbb{P}_X\left(|f_n(X)|\le \frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}M(s)}{\lfloor s\rfloor!}\right)ds + n^\lambda\mathbb{P}_X\left(|f_n(X)|\le\frac{1}{n^{\frac{\theta}{5}}}\right)\\
&\overset{(4.42)\text{ with }\delta=n^{-\frac{\theta}{5}}}{\le} C(\omega)\left(\left(\frac{1}{n^{\frac{\theta}{5}}}\right)^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}}+\frac{1}{n^{\frac{\theta}{5}}}+\int_0^{a_n}\left(\frac{(2\pi)^{\lfloor s\rfloor}M(s)}{\lfloor s\rfloor!}\right)^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}}ds + n^\lambda\times\frac{1}{n^{\frac{\theta}{5}}}\right).
\end{aligned}$$

Provided that λ is chosen small enough, each of the above term is uniformly bounded in n which guarantees the desired uniform integrability and achieves the proof.

Remark 4.4.1. *In the same way, a similar proof would give that $\mathbb{P}$-almost surely, for any compact $[a,b]$ of $[0,2\pi]$,*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathcal{N}(f_n,[a,b])}{n}=\frac{b-a}{\pi\sqrt{3}}.$$

Indeed, assuming this time that X is uniformly distributed over $[a,b]$, one may study the convergence of the stochastic process $g_n(x)=f_n\left(X+\frac{x}{n}\right)$ towards a non-degenerate limit and apply the same strategy.

4.5 Appendix

4.5.1 Birkhoff–Khinchine Theorem for Gaussian sequences

In this section, we recall the necessary material about Gaussian ergodicity and the technical details ensuring the validity of Lemma 4.3.4 and 4.3.9 stated in Sections 4.3.2 and 4.3.3 respectively. First, one can build the stationary sequence $\{a_k\}_{k\geq 1}$ as the coordinates on the space $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ endowed with the cylindrical topology and equipped with the Gaussian measure m defined as

$$\forall p \geq 1, \forall (A_1, \cdots, A_p) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^p,\ m\left(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p} \{a_i \in A_i\}\right).$$

Then, the shift operates on this space and preserves the measure m since the sequence $\{a_k\}_{k\geq 1}$ is stationary. We refer to [CFS82, pages 188] for an introduction to these kinds of dynamical systems. One can use the celebrated Birkhoff–Khinchine Theorem for this transformation, see e.g. [CFS82, pages 11], and we get that

$$\mathbb{P}-\text{a.s.},\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \to \mathbb{E}\left[(x_1, \cdots,) \mapsto x_1^2 \,\middle|\, \mathcal{I}\right],$$

where $\mathcal{I}$ is the sigma field generated by all the mappings from $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ that are shift-invariant m-almost surely. In particular, $\mathbb{P}-$almost surely, $\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7} a_k^2 + b_k^2$ has a finite limit as n goes to infinity, which is the key ingredient to establish Lemma 4.3.4.

Proof of Lemma 4.3.4. Recall that m is a large positive integer and n is defined as the unique integer such that $n^7 < m \leq (n+1)^7$. By Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^7}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right]\right| \leq t\,\mathbb{E}_X\left[|f_{n^7}(X) - f_m(X)|^2\right]^{1/2}.$$

Otherwise, we have the estimate

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_X\left[|f_{n^7}(X) - f_m(X)|^2\right] &\leq 2\left(1 - \sqrt{\frac{n^7}{m}}\right)^2 \mathbb{E}_X\left[f_{n^7}(X)^2\right] \\ &+2\,\mathbb{E}_X\left[\left|\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=n^7+1}^{m} a_k\cos(kX) + b_k\sin(kX)\right|^2\right] \qquad (4.47) \\ &= 2\left(1 - \sqrt{\frac{n^7}{m}}\right)^2 \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2 + b_k^2}{2} + \frac{2}{m}\sum_{k=n^7+1}^{m}\frac{a_k^2 + b_k^2}{2}. \end{aligned}$$

By Birkhoff–Khinchine Theorem, we have first

$$\left(1-\sqrt{\frac{n^7}{m}}\right)^2 \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} \sim \frac{1}{4n^9}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Besides, one may write

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\sum_{k=n^7+1}^{m}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} \leq \frac{1}{n^7}\sum_{k=n^7+1}^{(n+1)^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\\
&= \frac{(n+1)^7}{n^7}\frac{1}{(n+1)^7}\sum_{k=1}^{(n+1)^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} - \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\\
&= \left(\underbrace{\frac{1}{(n+1)^7}\sum_{k=1}^{(n+1)^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2} - \frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}}_{:=R_n}\right) + \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{6}\binom{7}{k}n^k}{n^7}}_{=O\left(\frac{1}{n}\right)} \times \underbrace{\frac{1}{(n+1)^7}\sum_{k=1}^{(n+1)^7}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}}_{=O(1)}.
\end{aligned}$$

Next we write

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=1}^{n^7}\left(\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\right)\left(\frac{1}{(n+1)^7}-\frac{1}{n^7}\right) + \frac{a_{(n+1)^7}+b_{(n+1)^7}}{2(n+1)^7}\\
&= \underbrace{\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n^7}\left(\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\right)}_{=O(1)}\underbrace{\left(\frac{1}{(1+1/n)^7}-1\right)}_{=O\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n+1}\underbrace{\frac{a_{(n+1)^7}^2+b_{(n+1)^7}^2}{2(n+1)^6}}_{=o(1)}.
\end{aligned}$$

Let us finally detail the $o(1)$ in the above equation. For any sequence $\{X_k\}_{k\geq 1}$ of standard Gaussian random variables, any $\beta > 0$ and any $\epsilon > 0$ we have

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(|X_k| > \epsilon k^\beta\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\epsilon k^\beta}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx < \infty.$$

Then Borel–Cantelli Lemma implies that $X_n/n^\beta \to 0$ almost surely, in particular in our case, we have $|a_{(n+1)^7}/(n+1)^3| = o(1)$, hence the result.

□

Proof of Lemma 4.3.9. Let us rewrite

$$Z_n(X,t,\lambda) = \sum_{p=1}^{M}\lambda_j g_n(t_p) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_{k,n}(X) + b_k\beta_{k,n}(X),$$

where

$$\alpha_{k,n}(X) := \sum_{p=1}^{M} \lambda_p \cos\left(kX + \frac{kt_p}{n}\right), \quad \beta_{k,n}(X) := \sum_{p=1}^{M} \lambda_p \sin\left(kX + \frac{kt_p}{n}\right).$$

Due to the orthogonality of trigonometric functions, a straightforward computation then yields the following orthogonality relations, for all $1 \leq k \leq n$ and $1 \leq k' \leq n'$

$$\mathbb{E}_X\left[\alpha_{k,n}(X)\alpha_{k',n'}(X)\right] = \mathbb{E}_X\left[\beta_{k,n}(X)\beta_{k',n'}(X)\right] = \delta_{k,k'} \times \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \cos\left(\frac{kt_p}{n} - \frac{kt_q}{n'}\right),$$

and

$$\mathbb{E}_X\left[\alpha_{k,n}(X)\beta_{k',n'}(X)\right] = \delta_{k,k'} \times \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q \sin\left(\frac{kt_p}{n} - \frac{kt_q}{n'}\right),$$

so that by symmetry

$$\mathbb{E}_X\left[\alpha_{k,n}(X)\beta_{k',n}(X)\right] = 0.$$

In particular, we have

$$\mathbb{E}_X\left[\alpha_{k,n}(X)^2\right] = \mathbb{E}_X\left[\beta_{k,n}(X)^2\right] \leq \frac{1}{2} \times ||\lambda||_1^2.$$

and

$$\begin{cases} \mathbb{E}_X\left[(\alpha_{k,n}(X) - \alpha_{k,n'}(X))^2\right] \leq 2\pi||\lambda||_1^2 \left|\frac{k}{n} - \frac{k}{n'}\right|, \\ \\ \mathbb{E}_X\left[(\beta_{k,n}(X) - \beta_{k,n'}(X))^2\right] \leq 2\pi||\lambda||_1^2 \left|\frac{k}{n} - \frac{k}{n'}\right|. \end{cases} \tag{4.48}$$

Recall that m is a positive integer and n is defined as the unique integer such that $n^7 < m \leq (n+1)^7$. By triangular inequality and Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_{n^7}(X,t,\lambda)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X,t,\lambda)}\right]\right| &\leq \mathbb{E}_X\left[\left|Z_{n^7}(X,t,\lambda) - Z_m(X,t,\lambda)\right|\right] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_X\left[U^2\right]} + \sqrt{\mathbb{E}_X\left[V^2\right]} + \sqrt{\mathbb{E}_X\left[W^2\right]} \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} U &:= \left(\frac{1}{\sqrt{n^7}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n^7} a_k\alpha_{k,n^7}(X) + b_k\beta_{k,n^7}(X)\right), \\ V &:= \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{k=1+n^7}^{m} a_k\alpha_{k,m}(X) + b_k\beta_{k,m}(X)\right), \\ W &:= \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{k=1}^{n^7} a_k\left(\alpha_{k,n^7}(X) - \alpha_{k,m}(X)\right) + b_k\left(\beta_{k,n^7}(X) - \beta_{k,m}(X)\right)\right). \end{aligned}$$

Using the orthogonality relations above, and again Birkhoff–Khinchine Theorem, we have then

$$\mathbb{E}_X[U^2] \leq ||\lambda||_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n^7}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2 \sum_{k=1}^{n^7} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = ||\lambda||_1^2 \underbrace{\left(1 - \sqrt{\frac{n^7}{m}}\right)^2}_{O(1/n^2)} \underbrace{\left(\frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^{n^7} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}\right)}_{O(1)}.$$

In the same way and proceeding as in the proof of Lemma 4.3.4 above, we get

$$\mathbb{E}_X[V^2] \leq ||\lambda||_1^2 \times \frac{1}{m} \sum_{k=1+n^7}^{m} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finally, using again the orthogonality relations and Equation (4.48), we obtain

$$\mathbb{E}_X[W^2] \leq ||\lambda||_1^2 \times 4\pi \times \left(1 - \frac{n^7}{m}\right) \times \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n^7} (a_k^2 + b_k^2)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

As a conclusion, we get that

$$\left| \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_{n^7}(X,t,\lambda)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X,t,\lambda)}\right] \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{1/14}}\right).$$

hence the result. □

4.5.2 Trigonometric kernels and convolutions

Recall the definitions of the kernel $K_n^{t,\lambda}$ and its normalized version $\bar{K}_n^{t,\lambda}$ given in Lemma 4.3.5.

$$K_n^{t,\lambda}(x) := \frac{1}{n} \left| \sum_{p=1}^{M} \lambda_p e^{i\frac{(n+1)}{2n} t_p} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}(x + \frac{t_p}{n})\right)}{\sin\left(\frac{x + \frac{t_p}{n}}{2}\right)} \right|^2, \quad \bar{K}_n^{t,\lambda}(x) := \frac{2\pi\, K_n^{t,\lambda}(x)}{\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx}.$$

Lemma 4.5.1. *The function $\bar{K}_n^{t,\lambda}$ is a good trigonometric kernel, i.e. it satisfies the following properties:*

1. $\bar{K}_n^{t,\lambda} \geq 0$ *and* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{K}_n^{t,\lambda}(x)dx = 1$.
2. *For n large enough, there exists a constant $C = C(t,\lambda) > 0$ such that uniformly in $x \in [0, 2\pi]$*

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} \bar{K}_n^{t,\lambda}(x) \leq Cn, \qquad \bar{K}_n^{t,\lambda}(x) \leq C\left(\sum_{p=1}^{M} \frac{1}{n\left(x + \frac{t_i}{n}\right)^2}\right).$$

3. For any $\delta > 0$ and for n large enough,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{|x|>\delta}\bar{K}_n^{t,\lambda}(x)dx = 0.$$

Proof. The first point results from the fact that $K_n^{t,\lambda}$ is trivially non negative and from the very definition of $\bar{K}_n^{t,\lambda}$. Notice that by Lemma 4.3.7, as n goes to infinity $\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx$ converges to

$$2\pi\sum_{p,q=1}^{M}\lambda_p\lambda_q \operatorname{sin}_c(t_p-t_q) = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{p=1}^{M}\lambda_p N_{t_p}\right|^2\right] > 0$$

where (N_t) is the standard Gaussian $\sin_c$ process, which is known to be non degenerate. Therefore, for n large enough, $\int_0^{2\pi} K_n^{t,\lambda}(x)dx$ is positive and we can give all the estimates on $K_n^{t,\lambda}$ without loss of generality. Precisely, for the second point, remark that by triangular inequality, for all $x \in [0, 2\pi]$,

$$K_n^{t,\lambda}(x) \leq 2^{p-1}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2 K_n\left(x+\frac{t_i}{n}\right).$$

where K_n is the standard Fejér kernel. The desired estimates then follow directly from the ones established in Lemma 4.2.1 for the standard Fejér kernel K_n. The third point is an immediate consequence of the second, since for n large enough, $K_n^{t,\lambda}(x) = O(1/n)$ for $|x| > \delta$. □

We can now give the proof of Lemma 4.3.6, i.e. the Fejér–Lebesgue type convergence associated to the kernel $\bar{K}_n^{t,\lambda}$.

Proof of Lemma 4.3.6. The proof is very close from the one of Lemma 4.2.2, with the slight difference that, contrary to K_n and L_n, the new kernel $\bar{K}_n^{t,\lambda}$ is not even. Let us set

$$\varphi_x^{\pm}(t) := \mu_\rho([0, x \pm t]) - t\psi_\rho(x), \quad \Phi_x^{\pm}(t) := \int_0^t |d\varphi_x^{\pm}(u)|.$$

Set in the same way $E^{\pm} := \{x \in [0, 2\pi], \Phi_x^{\pm}(t) = o(t)\}$. By Theorem 8.4, p 106 of [Zyg02], Lebesgue almost all point x in $[-\pi, \pi]$ belongs to the set $E^+ \cap E^-$. Otherwise, we have the representation

$$\bar{K}_n^{t,\lambda} * \mu_\rho(x) - \psi_\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\bar{K}_n^{t,\lambda}(u)d\varphi_x^-(u) + \int_0^{\pi}\bar{K}_n^{t,\lambda}(-u)d\varphi_x^+(u)du\right).$$

The rest of the proof then follows the exact same lines as the one of Lemma 4.2.2. Indeed, for all $x \in E^+ \cap E^-$, using the estimates for $\bar{K}_n^{t,\lambda}$ of the second point of Lemma 4.5.1 above and an integration by parts, one deduces that the two last integrals converge to zero as n goes to infinty. □

Chapter 5

On the zeros of non-analytic random signals

This chapter is based on our third article [APP21b], whose redaction is in its final stages, and which will be hopefully submitted for publication before the defense of the thesis.

5.1 Introduction and statement of the results

5.1.1 Introduction

The study of the nodal sets or level sets of random functions is the object of vast literature and connects various domains of mathematics, from probability theory to algebraic geometry and Riemannian geometry, or else mathematical physics. Of particular interest is the study of the zero sets of random algebraic polynomials, random trigonometric polynomials, or random combinations of Laplace eigenfunctions, and more specifically the universality of their asymptotics in the large degree / high energy regimes. Let us briefly recall what the notion of universality means in these contexts. Let $(a_k)_{k\geq 1}$ a sequence of random variables, centered with unit variance, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and let $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ a family of real functions. One then consider the random linear combinations

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t).$$

If $\varphi_k(t) = t^k$ or $\varphi_k(t) = \cos(kt)$ or $\sin(kt)$, one recovers for example the classical models of Kac random algebraic polynomials and trigonometric polynomials. We are then interested in the number of zeros of S_n on a given interval, denoted by

$$\mathcal{N}(S_n, [a, b]) := \mathrm{Card}\{t \in [a, b], S_n(t) = 0\}.$$

The question of the universality of the asymptotics of $\mathcal{N}(S_n, [a, b])$ as n goes to infinity consists in asking whether the latter does depend or not on the particular law of the random coefficients (a_k) and their correlations. Since the observable of interest $\mathcal{N}(S_n, [a, b])$

is random, the question of the universality can be considered in various probabilistic ways, e.g. in distribution, in expectation or even almost surely. Besides, one can study the local universality properties at a microscopic scale , e.g. in an interval $[a_n, b_n]$ whose length goes to zero as n goes to infinity, or at a macroscopic scale, in which case one then speaks of global universality properties.

In both algebraic and trigonometric frameworks, the literature dealing with universality properties of nodal sets associated with random polynomials is thriving. The reader can refer for example to [TV15, IKM16, NV18] and the references therein for local properties and to [AP15, Fla17, ADP19, AP19, Mat12, DNV18, Muk19] for universality results at a global scale. In the opposite direction, there are also examples of models where the asymptotics of the number of zeros does depend on the nature of the coefficients (a_k), see for example [Pir20, Pir21, Pau20, APP21a]. Interestingly, there are some models where the first order asymptotics is universal whereas the second order asymptotics is not, see [BCP19, DNN20].

For the most part of the existing literature about universality properties, the analyticity of the random functions φ_k – be they algebraic polynomials, trigonometric functions or else – plays a crucial role in the corresponding results. For example, Hurwitz Theorem ensures the continuity of the nodal sets in [IKM16], and Jensen integral formula is the starting point of [NV18] to count the number of zeros. This raises naturally the role played by the analyticity of the involved functions in the universality properties of nodal domains. If we have in mind the isolated zeros principle, it seems reasonable to think that the regularity of the function could affect the distribution of zeros.

The goal of this article, which continues the study initiated in [AP20b], is to show that the analyticity hypothesis is in fact non-necessary to obtain universal asymptotics, at both local and global scales. The method we use to derive the global asymptotics of the expected number of zeros indeed requires only a finite order regularity and can be applied for example to piecewise polynomial functions. It turns out that the main necessary ingredients are some a priori bounds on the number of zeros of the considered signals (which are free when considering algebraic or trigonometric polynomials) and not surprisingly, some anti-concentration estimates on the size of the signal. It is precisely the latter anti-concentration estimates that require the most regularity and it would be interesting / challenging to derive similar bounds with minimal regularity.

5.1.2 Model, main results and comments

Let us now specify the model of random periodic signals we consider in this article. For the most part, we work under the same framework as in the local universality context studied in [AP20b], which can naturally appear minimal if one hopes to establish global universality.

To make appear converging quantities, let us consider the rescaled process

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k f(kt),$$

where $(a_k)_{k\geq 1}$ is a sequence of i.i.d. centered random variables with variance one on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, and f is 2π-periodic function, non-analytic a priori.

In view of the universal asymptotics, we will suppose that

(A) $a_1 \in L^3(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

(H) $f \in H^1$, i.e. $||f||_2 + ||f'||_2 < +\infty$, with

$$\langle f, 1\rangle = 0 \ , \quad \langle f, f\rangle > 0 \text{ and } \langle f', f'\rangle > 0,$$

with $\langle \cdot, \cdot \rangle$ being the usual $L^2([0, 2\pi])$ scalar product and $\| \cdot \|_2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ the associated norm.
We will in particular consider the case of piecewise polynomial functions, that is functions f such that there exists a finite number of knots $s_1, \ldots, s_M$ in $[0, 2\pi]$ such that the restrictions $f_{|[s_i,s_{i+1}]}$ are polynomial functions and we will moreover suppose that f and can be written as a piecewise polynomial function with $\mathcal{C}^q([0, 2\pi])$ knots.

Let X a random variable whose distribution is uniform on $[0, 2\pi]$ and independent of the entries $(a_k)_{k\geq 1}$. More precisely, with this setting, we work on the product space

$$(\Omega \times [0, 2\pi], \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, 2\pi]), \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X),$$

with X seen as the identity map from $([0, 2\pi], \mathcal{B}([0, 2\pi]))$ onto itself. In the sequel, we denoted by $\mathbb{E}_X$ the expectation taken w.r.t. the probability $\mathbb{P}_X$. As in [AP19], we also introduce the stochastic process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ defined by

$$g_n(t) := f_n\left(X + \frac{t}{n}\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

We show first that almost surely w.r.t. the entries, the sequence f_n evaluated on the random variable X converges in distribution to a Gaussian variable.

Theorem 5.1.1. *Under **(A)** and **(H)**, $\mathbb{P}$-almost surely, for all $t \in \mathbb{R}$, we have*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)}\right] = e^{-\frac{t^2}{2}\langle f,f\rangle}.$$

In other words, $\mathbb{P}$-a.s., the sequence of random variables $(f_n(X))_{n\geq 0}$ converges in distribution under $\mathbb{P}_X$ towards $\sqrt{\langle f, f\rangle}N$, where N is a standard Gaussian variable.

This result is in fact a consequence of the following more general Central Limit Theorem analogue to Theorem 3 in [AP19], under the following slightly strong regularity assumption on the Fourier coefficients to ensures tightness.

Recalling that $g_n(t) := f_n\left(X + \frac{t}{n}\right), \quad t \in [0, 2\pi]$, we have the following convergence.

Theorem 5.1.2. *Under **(A)** and **(H)**, $\mathbb{P}$-almost surely, as n goes to infinity, the finite dimensional marginals of process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ converge in distribution to the ones of the stationary Gaussian process $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ with covariance function*

$$\mathbb{E}_X[g_\infty(t)g_\infty(s)] = \rho(t - s), \quad \textit{with} \begin{cases} \rho(u) := \dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u (f * \widetilde{f})(x)dx, \ u \neq 0 \\ \rho(0) = \langle f, f\rangle \end{cases},$$

where $\widetilde{f}(x) := f(-x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Moreover, if the function f is of class $\mathcal{C}^2$, the process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ converges is distribution in the $\mathcal{C}^1$ topology towards $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$.

Remark 5.1.1. *The limit process appearing in Theorem 5.1.2 coincides with the one appearing in [AP20b] when looking at the signal S_n in a deterministic (but possibly moving) window of size $1/n$. As observed in the latter reference, it is the natural generalization of the standard Gaussian process with $\sin_c$ covariance function appearing as a universal limit in many models, in particular in the case of random trigonometric polynomials.*

As done in [AP19], the convergence of the process g_n open the way to establish the global universality of the zeros of f_n. The main object of the present article is to go beyond the local universality result of [AP19] by establishing the universality of the asymptotics at the scale of the whole interval $[0, 2\pi]$. We work under the additional assumption

(H') f is piecewise polynomial with $\mathcal{C}^{q_0}$ knots, with $q_0 > 12$ and there exists $p \geq 1$ large enough and $\alpha > 0$ such that, for all $x \in V_p := \left[-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right]$, we have the lower-bound

$$|f^{(j)}(x)| \geq \alpha,$$

for some $j > 5$.

Then, we have the following global universality result for the mean number of zeros of f_n.

Theorem 5.1.3. *Assume **(A)**, **(H)** and **(H')**. Then,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])\right]}{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\langle f', f'\rangle}{\langle f, f\rangle}}.$$

Remark 5.1.2. *The previous Theorem 5.1.3 calls for several remarks.*

1. *If the generic function f is cosine, **(H)** is satisfied and we have $\langle f, 1\rangle = 0$, $\langle f, f\rangle = \langle f', f'\rangle > 0$ and we recover the well-known fact (see e.g. [Dun66]) that expected number of zeros of the universal limit $\sin_c$ process on $[0, 2\pi]$ is $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Assuming furthermore **(H')** makes it possible to bypass the analyticity and to exploit the key ingredient, that is the existence of a neighborhood of zero on which the j-th derivative of f is non-zero, for j large enough.*
2. *It remains an open question to determine whether or not the random superposition of triangular signals satisfies this same limit, since in this case, we cannot rely on the regularity properties of f in establishing the equi-integrability condition, crucial for global asymptotics in this method.*

This article is divided as follows: first, we prove in Sections 5.2 and 5.2.2 the Salem-Zygmund-like Theorems 5.1.1 and 5.1.2. In Section 5.3, we prove an equi-integrability condition relying on a small ball estimate for the j-th derivative $g_n^{(j)}(0)$, $j \geq 1$. It it the central argument to deduce the universality of the nodal asymptotics in expectation w.r.t. $\mathbb{P}$ as the degree n goes to infinity.

5.2 A functional almost sure Central Limit Theorem

This section is devoted to the proofs of Theorem 5.1.1 and its functional analogue Theorem 5.1.2, i.e. the $\mathbb{P}-$almost sure Central Limit Theorems associated with the signal S_n when evaluated at an independent and uniform random point.

5.2.1 The one-dimensional case

The strategy of proof of Theorem 5.1.1 follows globally the same lines as the original one given by Salem and Zygmund in [SZ54] in the case trigonometric polynomials with random signs. More specifically, we first establish an $L^2(\mathbb{P})$ estimate, then we use a Borel–Cantelli argument to obtain the desired almost sure convergence along a subsequence and conclude by getting rid of taking the subsequence. Recall that the goal is to establish that, $\mathbb{P}$ almost surely, for all $t \in \mathbb{R}$, we have

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X \left[e^{itf_n(X)} \right] = e^{-\frac{t^2}{2} < f,f >}.$$

Let us set

$$\sigma_n^2(X) := \mathbb{E}\left[f_n^2(X)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f^2(kX).$$

By Birkhoff ergodic Theorem, almost surely under $\mathbb{P}_X$, we have

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2(X) :=< f, f >,$$

so that by dominated convergence, Theorem 5.1.1 amounts to show that $\mathbb{P}-$almost surely, for all $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \mathbb{E}_X \left[e^{itf_n(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_n^2(X)]} \right] \right| = 0.$$

As announced, we will first establish an $L^2(\mathbb{P})$ estimate by considering

$$\Delta_n(t) := \mathbb{E}\left[\left| \mathbb{E}_X \left[e^{itf_n(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_n^2(X)]} \right] \right|^2 \right].$$

Lemma 5.2.1. *If a_1 admits a finite third moment and if $f \in H^1$, there exists a positive constant C such that*

$$\Delta_n(t) \leq \frac{C\left(t^2 + |t|^3\right)}{\sqrt{n}}.$$

To facilitate the global reading of the paper, the proof of Lemma 5.2.1 is postponed in Section 5.4 below. Let us then fix $\gamma > 2$ and $t \in \mathbb{R}$. By Borel–Cantelli Lemma, $\mathbb{P}-$almost surely (i.e. on a set of full measure which depends on t), as n goes to infinity, Lemma 5.2.1 ensures that

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \mathbb{E}_X \left[e^{itf_{n^\gamma}(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_{n^\gamma}^2(X)} \right] \right| = 0. \tag{5.1}$$

Now, let m a given integer. There exists a unique n such that $n^\gamma < m \leq (n+1)^\gamma$. Then, using the fact that the exponential is Lipschitz and Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^\gamma}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right]\right|^2 \leq t^2 \mathbb{E}_X\left[|f_{n^\gamma}(X) - f_m(X)|^2\right].$$

Expliciting the square, we get

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_X\left[(f_{n^\gamma}(X) - f_n(X))^2\right] \quad & \leq 2\left(1 - \sqrt{\frac{n^\gamma}{m}}\right)^2 \mathbb{E}_X\left[f_{n^\gamma}(X)^2\right] \\ & +2\left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right)\mathbb{E}_X\left[\left(\frac{1}{\sqrt{m-n^\gamma}}\sum_{k=n^\gamma+1}^{m} a_k f(kX)\right)^2\right].\end{aligned}$$

We have then the following Lemma, whose proof is given in Section 5.4.

Lemma 5.2.2. *There exists a constant $C = C(\omega)$ such that $\mathbb{P}-$almost surely*

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_X[f_n(X)^2] \leq C, \quad \textit{and more generally} \quad \sup_{\substack{n\geq 1\\ M\geq 1}} \mathbb{E}_X\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{M\leq k\leq M+n} a_k f_k(X)\right)^2\right] \leq C.$$

By Lemma 5.2.2, we deduce that

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_{n^\gamma}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right]\right|^2 \leq 2Ct^2\left[\left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right) + \left(1 - \sqrt{\frac{n^\gamma}{m}}\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{m^{1/\gamma}}\right).$$

Combining this last estimate with Equation (5.1), one can indeed conclude that for a fixed t, $\mathbb{P}-$almost surely

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}_X\left[e^{itf_m(X)}\right] = \lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_m^2(X)}\right] = e^{-\frac{t^2}{2}<f,f>}.$$

Therefore, we deduce that the above convergence holds $\mathbb{P}-$almost surely for all $t \in \mathbb{Q}$. To conclude that the asymptotics is valid $\mathbb{P}-$almost surely for all $t \in \mathbb{R}$, we remark that

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{isf_n(X)}\right]\right|^2 \leq |t-s|^2 \mathbb{E}_X[f_n(X)^2],$$

so that in virtue of Lemma 5.2.2 above, $\mathbb{P}-$almost surely

$$\sup_{|t-s|\leq\varepsilon}\sup_{n\geq 1}\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{isf_n(X)}\right]\right|^2 \leq C\,\varepsilon^2.$$

5.2.2 A functional Central Limit Theorem

In this section, we give a detailed proof of Theorem 5.1.2, which is the functional analogue of the previous Theorem 5.1.1. Recall that

$$g_n(t) := f_n\left(X + \frac{t}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k f\left(kX + \frac{kt}{n}\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

The goal is to establish that $\mathbb{P}-$almost surely, the family of processes $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ converge in distribution, under $\mathbb{P}_X$ and with respect to the $\mathcal{C}^1$ topology, towards an explicit stationary Gaussian process. As done classically, we proceed in two steps: first, we show the convergence of the finite dimensional marginals. Then, we focus on the tightness with respect to the $\mathcal{C}^1$ topology, which will be established using a Lamperti-like criterion.

Convergence of finite dimensional marginals

Let us first establish the convergence of the finite dimensional marginals of the localized process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$.

Proposition 5.2.1. *If a_1 admits a finite moment of order three and $f \in H^1$, then $\mathbb{P}-$almost surely, the finite marginals of $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ converge to the ones of a stationary Gaussian process $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ with covariance function*

$$\mathbb{E}_X[g_\infty(t)g_\infty(s)] = \rho(t-s), \quad \textit{with} \begin{cases} \rho(u) := \dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u (f * \widetilde{f})(x)dx, \ u \neq 0 \\ \rho(0) = \langle f, f\rangle \end{cases},$$

where $\widetilde{f}(x) := f(-x)$ for $x \in \mathbb{R}$.

For a fixed positive integer M and $t = (t_1, \ldots, t_M) \in [0, 2\pi]^M$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^M$, we set

$$Z_n(X, t, \lambda) := \sum_{p=1}^{M} \lambda_p g_n(t_p) = \sum_{p=1}^{M} \lambda_p f_n\left(X + \frac{t_p}{n}\right).$$

Establishing Proposition 5.2.1 comes down to prove that $\mathbb{P}-$almost surely, for all $M > 1$, for all $t \in [0, 2\pi]^M$ and $\lambda \in \mathbb{R}^M$, we have the following convergence of characteristic functions

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)}\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p\lambda_q\rho(t_p - t_q)\right).$$

The first reduction consists in remarking that, as in the one-dimensional case, it is sufficient to establish the almost sure convergence for fixed $t \in [0, 2\pi]^M$ and $\lambda \in \mathbb{R}^M$. Indeed, if $t, s \in [0, 2\pi]^M$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^M$ we have the following Lemma, whose proof is given in Section 5.4.

Lemma 5.2.3. *Under the hypotheses of Proposition 5.2.1, $\mathbb{P}-$almost surely there exists a positive constant $C = C(\omega)$ such that for any $0 < \alpha < 1/2$ and $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \eta < 1$*

$$\sup_{\substack{||t-s||_\infty \leq \varepsilon \\ ||\lambda-\mu||_1 \leq \eta \\ n \geq 1}} \left| \mathbb{E}_X \left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)} \right] - \mathbb{E}_X \left[e^{iZ_n(X,s,\mu)} \right] \right| \leq C \left(\eta + ||\lambda||_1 \times \varepsilon^\alpha \right).$$

The almost sure uniform continuity ensured by Lemma 5.2.3 above thus allows to restrict to the case where $t \in ([0, 2\pi] \cap \mathbb{Q})^M$ and $\lambda \in \mathbb{Q}^M$ and therefore to fixed values of t and λ. The next reduction comes from the following Lemma, whose proof is given in Section 5.4.

Lemma 5.2.4. *Under the hypotheses of Proposition 5.2.1, we have*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_X \left[e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_n(X,t,\lambda)^2]} \right] = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{M} \lambda_p \lambda_q \rho(t_p - t_q) \right). \tag{5.2}$$

Thanks to Lemma 5.2.4, Proposition 5.2.1 is thus equivalent to the following convergence, $\mathbb{P}-$almost surely,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \mathbb{E}_X \left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)} \right] - \mathbb{E}_X \left[e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_n(X,t,\lambda)^2]} \right] \right| = 0.$$

The proof then follows the same lines as its one dimensional counterpart Theorem 5.1.1. Namely, we have first the following $L^2(\mathbb{P})$ estimate, which is the analogue of Lemma 5.2.1 above and whose proof is given in Section 5.4 below.

Lemma 5.2.5. *Under the hypotheses of Proposition 5.2.1, there exists a constant C such that $\mathbb{P}-$almost surely*

$$\widetilde{\Delta}_n := \mathbb{E} \left[\left| \mathbb{E}_X \left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)} \right] - \mathbb{E}_X \left[e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_n(X,t,\lambda)^2]} \right] \right|^2 \right] \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

By Borel–Cantelli Lemma, if $\gamma > 2$, one thus deduces that $\mathbb{P}-$almost surely, we have

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \mathbb{E}_X \left[e^{iZ_{n^\gamma}(X,t,\lambda)} \right] - \mathbb{E}_X \left[e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_{n^\gamma}(X,t,\lambda)^2]} \right] \right| = 0.$$

As above, one finally gets rid of the subsequence n^γ using the following estimates, whose proof is again postponed in Section 5.4.

Lemma 5.2.6. *Under the hypotheses of Proposition 5.2.1, as m goes to infinity, if n is the unique integer such that $n^\gamma < m \leq (n+1)^\gamma$, then $\mathbb{P}-$almost surely, for all $0 < \alpha < 1/2$ we have*

$$\left| \mathbb{E}_X \left[e^{iZ_{n^\gamma}(X,t,\lambda)} \right] - \mathbb{E}_X \left[e^{iZ_m(X,t,\lambda)} \right] \right| = O\left(\left(1 - \frac{n^\gamma}{m} \right)^\alpha \right) = O\left(\frac{1}{m^{\alpha/\gamma}} \right).$$

Tightness under regularity assumptions

Having established the convergence of the finite marginals of g_n, we focus now on the tightness of the family of processes $(g_n)_{n\geq 1}$ in a suitable topology. In the next applications to nodal asymptotics, we will work with the $\mathcal{C}^1$ so that it is reasonable to impose some regularity to the base function f.

Proposition 5.2.2. *Suppose that the function f is of class $\mathcal{C}^2$, then $\mathbb{P}-$almost surely, the family of distributions of $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ under $\mathbb{P}_X$ is tight with respect to the $\mathcal{C}^1$ topology.*

Proof. The tightness with respect to the $\mathcal{C}^1$ topology of the family $(g_n)_{n\geq 1}$ under $\mathbb{P}_X$ is guaranteed by the following standard Lamperti-like criteria, see [RS01]

$$\exists C > 0, \quad \mathbb{E}_X[|g_n(t) - g_n(s)|^2] \leq C|t-s|^2, \quad \mathbb{E}_X[|g_n'(t) - g_n'(s)|^2] \leq C|t-s|^2. \tag{5.3}$$

We have

$$\mathbb{E}_X[|g_n(t) - g_n(s)|^2] = \mathbb{E}_X\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\left[f\left(kX + \frac{kt}{n}\right) - f\left(kX + \frac{ks}{n}\right)\right]\right)^2\right].$$

Using Minkowski inequality in $L^2(\mathbb{P}_X)$, we get first

$$\mathbb{E}_X[|g_n(t) - g_n(s)|^2] \leq n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |a_k|\, \mathbb{E}_X\left[\left[f\left(kX + \frac{kt}{n}\right) - f\left(kX + \frac{ks}{n}\right)\right]^2\right]^{1/2}\right)^2,$$

so that by Cauchy–Schwarz inequality we deduce

$$\mathbb{E}_X[|g_n(t) - g_n(s)|^2] \leq n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}_X\left[\left[f\left(kX + \frac{kt}{n}\right) - f\left(kX + \frac{ks}{n}\right)\right]^2\right]\right).$$

Since f is $\mathcal{C}^2 \subset \mathcal{C}^1$, we get

$$\mathbb{E}_X[|g_n(t) - g_n(s)|^2] \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) \times ||f'||_\infty \times |t-s|^2,$$

and by the strong law of large numbers, we can conclude that for $\mathbb{P}-$almost all ω, there exists a constant $C = C(\omega)$ such that

$$\mathbb{E}_X[|g_n(t) - g_n(s)|^2] \leq C(\omega) \times ||f'||_\infty \times |t-s|^2.$$

In the exact same manner, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_X[|g_n'(t) - g_n'(s)|^2] &= \mathbb{E}_X\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k \times \frac{k}{n}\left[f'\left(kX + \frac{kt}{n}\right) - f'\left(kX + \frac{ks}{n}\right)\right]\right)^2\right] \\ &\leq C(\omega) \times ||f''||_\infty \times |t-s|^2,\end{aligned}$$

hence the conclusion. □

Non-degeneracy of the limit process

Now establish that the limit process $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ is non degenerate in the sense that $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X-$almost surely, we have

$$(g_\infty(t)=0) \Longrightarrow (g'_\infty(t)\neq 0).$$

For sake of self-containment, we give the following Lemma, first stated in [AP20b].

Lemma 5.2.7. *The stationary Gaussian process $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ is $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X-$almost surely non-degenerate, i.e. $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X-$almost surely, we have*

$$\inf_{t\in[0,2\pi]}(|g_\infty(t)|+|g'_\infty(t)|)>0,$$

and if $[a,b]\subset[0,2\pi]$, its expected number of zeros is

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[\mathcal{N}(g_\infty,[a,b])\right]=\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{\langle f',f'\rangle}{3\langle f,f\rangle}}.$$

Proof. Using the periodicity of f and the independence of the random coefficients (a_k), an immediate computation gives for any $t\in[0,2\pi]$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[g_n(t)^2]=<f,f>,\qquad \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[g_n(t)g'_n(t)]=0,$$

and

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[g'_n(t)^2]=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^2}\right)<f',f'>\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{<f',f'>}{3}.$$

Therefore the law of $(g_\infty(t),g'_\infty(t))$ does not depend on t and is the one of a centered Gaussian vector with covariance matrix

$$\Gamma:=\begin{pmatrix}\langle f,f\rangle & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\langle f',f'\rangle\end{pmatrix}.$$

Since we have assumed that $\langle f,f>0$ and $\langle f',f'\rangle>0$, we deduce that $\det\Gamma>0$. In particular, the Gaussian vector $(g_\infty(t),g'_\infty(t))$ admits a uniformly bounded density for $t\in[0,2\pi]$. Using Bulinskaya Lemma, see e.g. Proposition 6.11 of [AW09], we deduce the non-degeneracy of the process. In particular, we can apply Kac–Rice formula to compute

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[\mathcal{N}(g_\infty,[a,b])]=\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[g'_\infty(t)^2]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[g_\infty(t)^2]}}dt=\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{\langle f',f'\rangle}{3\langle f,f\rangle}}.$$

□

5.3 Study of the number of real zeros

Let us recall the following deterministic result, which makes it possible to consider the number of zeros of f_n through the "point of view" of a uniform random variable X on the torus. For more details, see Lemma 3 in [AP19].

Lemma 5.3.1. *Let X a random variable which is uniformly distributed over $[0, 2\pi]$. Let f a 2π-periodic function with a finite number of zeros over a period. Then, for any $h \in (0, 2\pi)$,*

$$\frac{h}{2\pi} \times \mathcal{N}(f, [0, 2\pi]) = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(f, [X, X + h])\right].$$

Taking $h = \frac{2\pi}{n}$ in the previous Lemma gives, for $X \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$ independent of the entries $(a_k)_{k\geq 1}$, that

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}\left(f_n, \left[X, X + \frac{2\pi}{n}\right]\right)\right].$$

Using the stochastic process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ defined before, it links the mean number of real zeros de f_n to the mean number of zeros of g_n via

$$\frac{\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi])}{n} = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])\right]. \tag{5.4}$$

The main byproduct of the functional Theorem 5.1.2 is the following corollary.

Corollary 5.3.1. *Consider the localized process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]} := \left(f_n\left(X + \frac{t}{n}\right)\right)_{t\in[0,2\pi]}$. Assuming **(A)**, **(H)** with $f \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi])$, we have*

1. *$\mathbb{P}$-a.s., as n goes to infinity, the number of zeros $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ of the localized process $(g_n(t))_{t\in[0,2\pi]}$ converges in distribution under $\mathbb{P}_X$ towards $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$.*
2. *As n goes to infinity, $\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])$ converges in distribution under $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X$ towards $\mathcal{N}(g_\infty, [0, 2\pi])$.*

Proof. For the first statement, we have that deterministically, the number of roots w.r.t. the $\mathcal{C}^1$ topology is continuous as soon as the limit is non-degenerated, i.e.

if u_n converges towards u as $n \to +\infty$ for the $\mathcal{C}^1$ topology with $\inf_{t\in[0,2\pi]}(|u(t)| + |u'(t)|) > 0$, then $Card\left(u_n^{-1}(\{0\}) \cap [0, 2\pi]\right) \to Card(u^{-1}(\{0\}) \cap [0, 2\pi])$.

The reader can refer to Proposition 4.1 of [AP19] for a proof of this fact.
Thanks to Theorem 5.1.2, the process $\{g_n(\cdot)\}_{n\geq 1}$ converges for the $\mathcal{C}^1$-topology towards a non-degenerate stationary Gaussian process g_∞ in the following sense:

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X\text{-a.s.},\ \forall t \in [0, 2\pi],\ |g_\infty(t)| + |g_\infty'(t)| > 0.$$

Since the number of zeros is continuous with respect to the $\mathcal{C}^1$ topology on non-degenerate processes, the continuous mapping theorem finishes the proof. For the second statement, using that if h is a continuous and bounded test function, the first point gives that, as n goes to infinity,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X \left[h(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi]))\right] = \mathbb{E}_X \left[h(\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi]))\right].$$

Then, by dominated convergence, we obtain

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \left[h\left(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])\right)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X} \left[h(\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi]))\right].$$

□

The goal of this section is to establish global universality, which thanks to Equation (5.4) comes down to showing that

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])\right] = \mathbb{E}_X \left[\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi])\right].$$

In other words, we need to obtain the convergence of the first moment of $\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])$. Since the convergence in distribution is not sufficient to achieve that, for $\eta > 0$ small enough, we need to prove some additional equi-integrability condition of the form

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_X \mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])^{1+\eta} < +\infty. \tag{5.5}$$

To achieve this, we only need to assume that our general function $|f|$ is positively lower-bounded on a fixed small neighborhood of zero. More specifically, we work from now on under the following additional assumption on the generic function f:

(H') f is piecewise polynomial with $\mathcal{C}^{q_0}$ knots, with $q_0 > 12$ and there exists $p \geq 1$ large enough and $\alpha > 0$ such that, for all $x \in V_p := \left[-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right]$, we have the lower-bound

$$|f^{(j)}(x)| \geq \alpha,$$

for some $j > 5$.

5.3.1 Small ball estimate

Before proving the small estimate for the j-th derivative of f_n, we need to establish a technical estimate that will come in handy.

Lemma 5.3.2. *Under (H'), for $M \geq 2p$, for all $n \geq 1$ and $X \in [0, 2\pi]$,*

$$\sum_{k=\lfloor \frac{M}{2} \rfloor}^{M} \mathbb{1}_{V_p}(kX) \geq \left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor - 1.$$

Proof. We divide the torus $[0, 2\pi]$ into p intervals $E_1, \dots, E_p$ of size $\frac{2\pi}{p}$. Since

$$1 = \sum_{i=1}^{p} \frac{\text{Card}\left\{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor \leq k \leq M \mid kX \in E_i\right\}}{M - \lfloor \frac{M}{2} \rfloor},$$

there exists one index $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ such that

$$\frac{\text{Card}\left\{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor \leq k \leq M \mid kX \in E_{i_0}\right\}}{M - \lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \geq \frac{1}{p},$$

in other words

$$\text{Card}\left\{\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \leq k \leq M \mid kX \in E_{i_0}\right\} \geq \frac{M - \lfloor M/2 \rfloor}{p} \geq \left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor.$$

It implies that there exists $\left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor$ distincts integers $k_1, \dots, k_{\left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor}$ such that

$$\left\{k_1 X, \dots, k_{\left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor} X\right\} \subseteq E_{i_0}.$$

In particular, $\left(k_{\left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor} - k_1\right) X, \dots, \left(k_{\left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor} - k_{\left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor - 1}\right) X$ are distincts and in V_p. It gives

$$\sum_{k=\lfloor M/2 \rfloor}^{M} \mathbb{1}_{V_p}(kX) \geq \left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor - 1.$$

$\square$

From this technical Lemma, we deduce the following lower-bound.

Lemma 5.3.3. *Under **(H')**, for $M \geq 2p$, there exists a constant $C(p, \alpha, j) > 0$ such that*

$$\sum_{k=1}^{M} k^{2j} \left[f^{(j)}(kX)\right]^2 \geq C(p, \alpha, j) M^{2j+1}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} k^{2j} \left[f^{(j)}(kX)\right]^2 &\geq \sum_{k=\lfloor \frac{M}{2} \rfloor}^{M} k^{2j} [f^{(j)}(kX)]^2 \geq \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor^{2j} \sum_{k=\lfloor \frac{M}{2} \rfloor}^{M} [f^{(j)}(kX)]^2 \mathbb{1}_{kX \in V_p} \\
&\geq \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor^{2j} \alpha^2 \sum_{k=\lfloor \frac{M}{2} \rfloor}^{M} \mathbb{1}_{kX \in V_p} \geq \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor^{2j} \alpha^2 \left(\left\lfloor \frac{M}{2p} \right\rfloor - 1\right) \\
&\geq C(p, \alpha, j) M^{2j+1},
\end{aligned}$$

exploiting the estimate obtained in Lemma 5.3.2. $\square$

The following Lemma uses the same tools as Lemma 4 of [Fla17] for trigonometric polynomials, exploiting higher-order derivatives in order to gain precision on the small ball estimate.

Lemma 5.3.4. *Under* ***(H')****, there exists a constant* $C = C(p, \alpha, j) > 0$ *such that for* $n \geq 1$ *large enough and* $\varepsilon > 0$*,*

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(|g_n^{(j)}(0)| \leq \varepsilon \right) \leq C \left(\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon} n^{\frac{2j+1}{4}}} \right). \tag{5.6}$$

Proof. In all the proof, n is chosen large enough.
For $\lambda > 0$, let η be a random variable independent of X and of the entries $(a_k)_{k \geq 1}$ with characteristic function

$$\psi(t) := \mathbb{E}[e^{it\eta}] = \frac{\sin^2(t\lambda)}{t^2 \lambda^2}.$$

Under **(H')**, consider

$$\tilde{g}_n^{(j)}(0) := g_n^{(j)}(0) + \eta.$$

For all $\varepsilon > 0$, we have

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\left| g_n^{(j)}(0) \right| \leq \varepsilon \right) \leq \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\left| \tilde{g}_n^{(j)}(0) \right| \leq \frac{3}{2} \varepsilon \right) + \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(|\eta| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right). \tag{5.7}$$

Let $\tilde{\varphi}_n$ be the characteristic function of $\tilde{f}_n^{(j)}(X)$ under $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X$. Since the coefficients $(a_k)_{k \geq 1}$ are i.i.d, we obtain

$$|\tilde{\varphi}_n(t)| = \psi(t) \mathbb{E}_X \prod_{k=1}^{n} \left| \varphi \left(\frac{k^j}{n^{j+1/2}} t f^{(j)}(kX) \right) \right|.$$

Using Fourier inversion and the fact that for every $y \geq 0$, $|t^{-1} \sin(yt)| \leq y$ with $t \neq 0$, we can write

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\left| \tilde{g}_n^{(j)}(0) \right| \leq y \right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(yt)}{t} \mathrm{Re}(\tilde{\varphi}_n(t)) dt \\ &\leq \frac{2y}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(t) \mathbb{E}_X \prod_{k=1}^{n} \left| \varphi \left(k^j \frac{t f^{(j)}(kX)}{n^{j+1/2}} \right) \right| dt. \end{aligned}$$

Since for $k = 1, \ldots, n$ the entries a_k are centered with variance one, there exists $c > 0$ small enough such that for all $t \in [-c, c]$,

$$|\varphi(t)| \leq e^{-\frac{t^2}{4}}. \tag{5.8}$$

Let $(\Gamma_l)_{l=0,\ldots,n}$ be a disjoint partition of $\mathbb{R}_+$ defined by

$$\begin{aligned} \Gamma_l &:= \left\{ t : \frac{c}{(l+1)^j} \leq \frac{t}{n^{j+1/2}} < \frac{c}{l^j} \right\} \text{ for } l = 1, \ldots, n-1, \\ \Gamma_n &:= \{ t : 0 \leq t < c\sqrt{n} \}, \\ \Gamma_0 &:= \{ t : \frac{t}{n^{j+1/2}} \geq c \}. \end{aligned}$$

For $l = 0, \ldots, n$, set the quantity

$$I_l := \int_{\Gamma_l} \psi(t) \mathbb{E}_X \prod_{k=1}^{n} \left| \varphi \left(k^j \frac{t f^{(j)}(kX)}{n^{j+1/2}} \right) \right|.$$

Set $l_0 = 2p$ – where p is given by assumption **(H')** – the first integer such that Estimate (5.6) holds.
We decompose the integral above as follows

$$\mathbb{P}\left(\left| \tilde{g}_n^{(j)}(0) \right| \leq y \right) \leq \frac{2y}{\pi} \left(I_0 + \sum_{l=1}^{l_0-1} I_l + \sum_{l=l_0}^{n-1} I_l + I_n \right).$$

For the integral over Γ_0, using the upper-bound $|\varphi(t)| \leq 1$ and $\sin^2(\lambda t) \leq 1$, we get

$$I_0 \leq \int_{cn^{j+1/2}}^{\infty} \psi(t) = \int_{cn^{j+1/2}}^{\infty} \frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^2 t^2} dt \leq \frac{1}{c\lambda^2} \frac{1}{n^{j+1/2}}.$$

In the same manner, for $l = 1, \ldots, l_0 - 1$, upper-bounding $|\varphi|$ by one again gives

$$I_l \leq \int_{\Gamma_l} \psi(t) dt \leq \int_{cn^{j+1/2}/(l+1)^j}^{cn^{j+1/2}/l^j} \psi(t) dt \leq \int_{cn^{j+1/2}/l_0^j}^{+\infty} \psi(t) dt \leq \frac{l_0^j}{c\lambda^2} \frac{1}{n^{j+1/2}}.$$

Notice now that under **(H')**, by Lemma 5.3.3 , there exists a universal constant $C(p, \alpha, j) > 0$ independent of n and X such that, for an index $M \geq 2p = l_0$ large enough, for all $n \geq 0$, $\mathbb{P}_X$-a.s.,

$$\sum_{k=1}^{M} k^{2j} [f^{(j)}(kX)]^2 \geq C(p, \alpha, j) M^{2j+1} \tag{5.9}$$

For the integral over Γ_n, we apply Equation (5.9) for $M = n$, which gives the existence of a constant $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha, j)$ such that

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^{c\sqrt{n}} \psi(t) \mathbb{E}_X \left[\exp\left(-\frac{t^2}{4} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^{2j} [f^{(j)}(kX)]^2 \right) \right] dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \psi(t) \underbrace{e^{-C(\alpha,j)t^2}}_{\leq 1} dt \leq \tilde{C}, \end{aligned}$$

since ψ in integrable on $\mathbb{R}^+$.

For $l = l_0, \ldots, n-1$, remark that, assuming without loss of generality $\|f^{(j)}\|_\infty = 1$, we have

$$\left| l^j \frac{t f^{(j)}(kX)}{n^{j+1/2}} \right| \leq \frac{l^j t}{n^{j+1/2}} \|f^{(j)}\|_\infty \leq c.$$

Then, we estimate all factors with $k = 1, \ldots, l$ using the estimates (5.8) and (5.9) and we use the trivial upper-bound $|\varphi(t)| \leq 1$ for the other factors:

$$\begin{aligned}
I_l &\leq \int_{\Gamma_l} \psi(t) \mathbb{E}_X \left[\exp\left(-\frac{1}{4} \frac{t^2}{n^{2j+1}} \sum_{k=1}^{l} k^{2j} [f^{(j)}(kX)]^2 \right) \right] dt \\
&\leq \int_{\frac{cn^{j+1/2}}{(l+1)^j}}^{\frac{cn^{j+1/2}}{l^j}} \frac{1}{\lambda^2 t^2} \exp\left(-C(\alpha, j) t^2 \left(\frac{l}{n} \right)^{2j+1} \right) dt \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{l}{n} \right)^{j+1/2} \int_{c\frac{l^{j+1/2}}{(l+1)^j}}^{c\sqrt{l}} \frac{1}{u^2} e^{-C(\alpha,j)u^2} du \\
&\leq \frac{\tilde{C}}{\lambda^2} \left(\frac{l}{n} \right)^{j+1/2} e^{-C(\alpha,j)l},
\end{aligned}$$

after performing the change of variable $u^2 = t^2 \left(\frac{l}{n}\right)^{2j+1}$ with $\tilde{C}, C > 0$ being small constants independent of n, X. Summing up, there exists a constant $\widetilde{C} > 0$ such that

$$\sum_{l=l_0}^{n-1} I_l \leq \frac{\tilde{C}}{\lambda^2} \frac{1}{n^{j+1/2}} \sum_{l=l_0}^{n-1} l^{j+1/2} e^{-Cl} \leq \frac{\widetilde{C}}{\lambda^2} \frac{1}{n^{j+1/2}}. \tag{5.10}$$

Gathering everything, we obtain the existence of a constant $C > 0$ such that

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\left| \tilde{g}_n^{(j)}(0) \right| \leq y \right) \leq Cy \left(\frac{1}{\lambda^2 n^{j+1/2}} + 1 \right). \tag{5.11}$$

We now estimate the second term on the right-hand side Equation (5.7) using Tchebychev inequality:

$$\mathbb{P}(|\eta| \geq z) \leq \frac{\mathrm{Var}(\eta)}{z^2} = \frac{2}{3} \frac{\lambda^2}{z^2} \quad , z > 0. \tag{5.12}$$

Taking $y = \frac{3}{2}\varepsilon$ in Equation (5.11) and $z = \frac{\varepsilon}{2}$ in Equation (5.12) yields the existence of a constant $C = C(\alpha, j) > 0$ such that

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\left| g_n^{(j)}(0) \right| \leq \varepsilon \right) \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2} \frac{1}{n^{j+1/2}} + \varepsilon + \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2} \right).$$

Optimizing this bound with $\lambda = \lambda_0 := \varepsilon^{\frac{3}{4}} / n^{\frac{j}{4} + \frac{1}{8}}$ gives the wanted result. $\square$

Remark 5.3.1. *Taking η the random variable with characteristic function $\psi(t) := (\psi_0(t))^{2p}$ with $p \geq 1$ and $\psi_0(t) = \mathrm{sin}_c(t\lambda)$ in the previous proof yields by the same techniques*

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(|\tilde{g}_n^{(j)}(0)| \leq y \right) \leq Cy \left(\frac{1}{\lambda^{2p} n^{\frac{(2p-1)(2j+1)}{2}}} + 1 \right).$$

Since $Var(\eta) = \frac{2p}{12}\lambda^2$, the same optimization

$$\lambda_0 = \left(\frac{\epsilon^3}{n^{(2p-1)(2j+1)/2}}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

gives

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(|g_n^{(j)}(0)| \leq \epsilon\right) \leq C \left(\epsilon + \frac{1}{n^{(2j+1)\frac{(2p-1)}{p+1}} \epsilon^{2-\frac{3}{p+1}}}\right).$$

In particular, increasing p does not give a better small ball estimate.

5.3.2 Application to average nodal asymptotics

Let us first give an *a priori* bound on the number of zeros. Assume **(H')**, i.e. that the general function f can be written as a piecewise polynomial function with $\mathcal{C}^{q_0}([0, 2\pi])$ knots. More precisely, fix a positive integer M. Let $P_1, \ldots, P_M$ M polynomial functions with degree $d_1, \ldots, d_M$ respectively. Let us denote by $s_1, \ldots, s_M$ the knots, i.e. s_i is a $\mathcal{C}^{q_0}$-knot matching P_i with P_{i+1}.

Lemma 5.3.5. $\mathbb{P}$-*a.s.,*

$$\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) = O(n^2).$$

Proof. The set $\mathcal{S} := \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \}$ of the knots of the function $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k f(kt)$ are the elements $t \in [0, 2\pi]$ such that there exists $k \in \{1, \ldots, n\}$ for which $kt = s_i \mod 2\pi$, for some $i \in \{1, \ldots, M\}$. Since for $1 \leq k \leq n$, any possible knot $t = \frac{s_i}{k}$ gives itself k knots by 2π-periodicity, we deduce that $\mathrm{Card}(\mathcal{S}) \leq Mn^2$. Now, for $i = 1, \ldots, \mathrm{Card}(\mathcal{S}) - 1$, the restriction of f_n on the interval $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$, is a polynomial of degree at most $d := \max(d_1, \ldots, d_M)$ hence has at most d zeros on $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$. Therefore,

$$\mathcal{N}(f_n, [0, 2\pi]) \leq Mn^2 \times d = O(n^2).$$

□

Remark that the previous Proposition works for any distribution of the entries a_k. From the small ball section, we can deduce an equi-integrability condition of the type (5.5).

Proposition 5.3.1. *Assume **(H')**. Let $\eta > 0$ be small enough. Then,*

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X} |\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta} < +\infty.$$

Proof. Assuming the quadratic bound for the number of real zeros given by Lemma 5.3.5, Fubini inversion gives

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P} \otimes X} \left[|\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi])|^{1+\eta}\right] = (1 + \eta) \sum_{p=0}^{Mdn^2} p^\eta \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > p\right),$$

Set δ_p such that $\delta_p \to 0$ and $p\delta_p \to +\infty$ as p goes to infinity. Therefore we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>p) &= \mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{k=1}^{\left\lfloor\frac{1}{\delta_p}\right\rfloor}\mathcal{N}\left(g_n,[2\pi\delta_p(k-1),2\pi\delta_p k]\right)>\frac{p}{\frac{1}{\delta_p}}\right)\\
&\le \sum_{k=1}^{\lfloor 1/\delta_p\rfloor}\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}\left(g_n,[2\pi\delta_p(k-1),2\pi\delta_p k]\right)>p\delta_p\right)
\end{aligned}$$

Under $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X$, we have stationarity of the number of zeros of g_n on an interval of size $2\pi\delta_p$ since X is uniform hence the previous probabilities are independent of k, thus

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>p)\le\lfloor 1/\delta_p\rfloor\,\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}\left(g_n,[0,2\pi\delta_p]\right)>p\delta_p\right).$$

Let q a positive integer such that $9(1+\eta)<q<q_0-2$ and let $j\ge 1$ such that

$$\frac{2}{5}q+\frac{9}{10}+\frac{12}{5}\eta\le j<q-\frac{9}{2}-3\eta. \tag{5.13}$$

In particular, $j>5$. For p large enough, $p\delta_p>q$, hence

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X(\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi])>p)\le\lfloor 1/\delta_p\rfloor\,\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}\left(g_n,[0,2\pi\delta_p]\right)>q\right). \tag{5.14}$$

Iterating Rolle Lemma, noticing that if g_n has at least q zeros on $[0,2\pi\delta_p]$, then $g_n^{(j)}$ has at least $q-j$ zeros, we obtain

$$\sup_{x\in[0,2\pi\delta_p]}|g_n^{(j)}(x)|\le\frac{(2\pi\delta_p)^{q-j}}{(q-j)!}\sup_{x\in[0,2\pi\delta_p]}|g_n^{(q)}(x)|.$$

Since δ_p goes to zero as p goes to infinity, for p large enough,

$$\sup_{x\in[0,2\pi\delta_p]}|g_n^{(q)}(x)|\le\sup_{x\in[0,2\pi]}|g_n^{(q)}(x)|=\|g_n^{(q)}\|_{L^\infty([0,2\pi])}.$$

Then, we deduce that the last probability (5.14) can be upper-bounded as follows:

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}\left(g_n,[0,2\pi\delta_p]\right)>q\right)\ \le\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|g_n^{(j)}(0)|\le\frac{(2\pi\delta_p)^{q-j}}{(q-j)!}\|g_n^{(q)}\|_{L^\infty([0,2\pi])}\right)$$

so that for any $M>0$,

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\mathcal{N}([0,2\pi])>p\right)\le\left\lfloor\frac{1}{\delta_p}\right\rfloor\times\left[\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|g_n^{(j)}(0)|\le\frac{(2\pi\delta_p)^{q-j}}{(q-j)!}M\right)+\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\|g_n^{(q)}\|_{L^\infty([0,2\pi])}>M\right)\right]$$

Let us estimate first the probability

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\|g_n^{(q)}\|_{L^\infty([0,2\pi])}>M\right).$$

Markov inequality yields

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\|g_n^{(q)}\|_{L^\infty([0,2\pi])}>M\right)\leq\frac{1}{M^2}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left(\|g_n^{(q)}\|_{L^\infty([0,2\pi])}\right)^2.$$

Comparing the uniform norm with Sobolev norms, see Lemma 5.15 p.107 of [AF03], if $\|\cdot\|_2$ denotes the standard L^2 norm on $[0,2\pi]$, there exists a universal constant $C>0$ such that

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\|g_n^{(q)}\|^2_{L^\infty([0,2\pi])}\leq C\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\|g_n^{(q)}\|_2^2+\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\|g_n^{(q+1)}\|_2^2\right).$$

Using Fubini inversion, for $\ell\in\{q,q+1\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes X}\left[\|g_n^{(\ell)}\|_2^2\right]&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_n^{(\ell)}(t)|^2dt\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[|g_n^{(\ell)}(t)|^2\right]dt.\end{aligned}$$

We have the following Lemma, whose proof can be found in the Appendix section.

Lemma 5.3.6. *Under **(H')**, uniformly on $t\in[0,2\pi]$, for $\ell\in\{q,q+1\}$ with $q_0-q>2$,*

$$\sup_{n\geq1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}[|g_n^{(\ell)}(t)|^2]\leq C.$$

Using Lemma 5.3.6, there exists a constant $C(f)>0$ such that

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\|g_n^{(\ell)}\|_2^2\leq C(f)<+\infty,\quad\ell\in\{q,q+1\}.$$

We thus have the existence of a constant $C(f)>0$ only depending on f such that

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(\|g_n^{(q)}\|_\infty>M\right)\leq\frac{C(f)}{M^2}.\tag{5.15}$$

Let us now turn to the probability

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|g_n^{(j)}(0)|\leq\frac{(2\pi\delta_p)^{q-j}}{(q-j)!}M\right).$$

Assuming the small ball estimate (5.6),

$$\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X\left(|g_n^{(j)}(0)|\leq\frac{(2\pi\delta_p)^{q-j}}{(q-j)!}M\right)\leq C\left(\delta_p^{q-j}M+\frac{1}{n^{\frac{2j+1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{M}\delta_p^{\frac{q-j}{2}}}\right).$$

Combining everything, we need to choose the parameter $M>0$ in the following quantity

$$p_{j,q}(M):=\delta_p^{q-j}M+\frac{1}{n^{\frac{2j+1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{M}\delta_p^{\frac{q-j}{2}}}+\frac{1}{M^2}.$$

Taking M_0 such that $\delta_p^{q-j} M_0 = \frac{1}{M_0^2}$ gives

$$p_{i,q}(M_0) = \delta_p^{\frac{2}{3}(q-j)} + \frac{1}{n^{\frac{2j+1}{4}}} \frac{1}{\delta_p^{\frac{q-j}{3}}}.$$

Hence

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > p \right) \leq \delta_p^{\frac{2}{3}(q-j)-1} + \frac{1}{n^{\frac{2j+1}{4}}} \frac{1}{\delta_p^{\frac{q-j}{3}+1}}.$$

To finish the proof, take $\delta_p = p^{-1/2}$. From the previous calculations, we have

$$\sum_{p=0}^{Mdn^2} p^\eta \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_X \left(\mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) > p \right) \leq \sum_{p=1}^{Mdn^2} p^{\eta+\frac{1}{2}} \frac{1}{p^{\frac{q-j}{3}}} + \frac{1}{n^{\frac{2j+1}{4}}} \sum_{p=1}^{Mdn^2} p^{\eta+\frac{1}{2}+\frac{q-j}{6}}.$$

The previous condition (5.13) guarantees that $\eta + \frac{1}{2} - \frac{q-j}{3} < -1$ and $\eta + \frac{1}{2} + \frac{q-j}{6} > 1$. Hence, recognizing a Riemann series, we have first

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{p=1}^{Mdn^2} p^{\eta+\frac{1}{2}-\frac{q-j}{3}} < +\infty$$

and by standard comparison of series with their integrals,

$$\sum_{p=1}^{Mdn^2} p^{\eta+\frac{1}{2}+\frac{q-j}{6}} \leq C(Mdn^2)^{\eta+\frac{1}{2}+\frac{q-j}{6}}.$$

Condition (5.13) also implies that

$$2\left(\eta + \frac{1}{2} + \frac{q-j}{6}\right) \leq \frac{2j+1}{4},$$

which ensures that

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{2j+1}{4}}} \sum_{p=1}^{Mdn^2} p^{\eta+\frac{1}{2}+\frac{q-j}{6}} < +\infty.$$

Putting everything together, we have indeed

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left| \mathcal{N}(g_n, [0, 2\pi]) \right|^{1+\eta} < +\infty.$$

□

Combining the last equi-integrability Proposition 5.3.1 with the convergence in distribution of the number of real zeros established in the second point of Corollary 5.3.1, we obtain the convergence of the first moment.

Corollary 5.3.2. *Under **(A)**, **(H)**, **(H')**,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\mathcal{N}(g_n,[0,2\pi]) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi]).$$

We can now give the proof of our main result, Theorem 5.1.3, giving the asymptotic mean number of zeros of f_n as n goes to infinity.

Proof of Theorem 5.1.3. Combining Equation (5.4) and Corollary 5.3.2, we thus get that

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])\right]}{n} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi])\right].$$

Since by Theorem 5.1.2, under $\mathbb{P}_X$, the limit process $(g_\infty(t))_{t\in[0,2\pi]}$ is a stationary Gaussian process with covariance function

$$\begin{cases} \rho(u) := \dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u (f * \widetilde{f})(x)dx, \ u \neq 0 \\ \rho(0) = \langle f, f\rangle \end{cases}$$

Thanks to Lemma 5.2.7,

$$\mathbb{E}_X\mathcal{N}(g_\infty,[0,2\pi]) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\langle f', f'\rangle}{\langle f, f\rangle}}.$$

More generally, a similar proof would give that for any interval $[a,b] \subset [0,2\pi]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathcal{N}(f_n,[0,2\pi])]}{n} = \frac{b-a}{\pi\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\langle f', f'\rangle}{\langle f, f\rangle}}.$$

□

5.4 Proofs of technical lemmas

Proof of Lemma 5.2.1

We give here the detailed proof of Lemma 5.2.1. Namely, recalling that

$$\Delta_n(t) := \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}_X\left[e^{itf_n(X)} - e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_n^2(X)}\right]\right|^2\right],$$

we want to establish that if a_1 admits a finite third moment and if $f \in H^1$, there exists a positive constant C such that

$$\Delta_n(t) \leq \frac{C(t^2+|t|^3)}{\sqrt{n}}.$$

Developing the square under the expectation, if Y an independent copy of X, by inverting the sums, we obtain

$$\Delta_n(t) \quad = \quad \mathbb{E}_{X,Y}\left[\Delta_{n,1}(t)\right] + \mathbb{E}_{X,Y}\left[\Delta_{n,2}(t)\right] + \mathbb{E}_{X,Y}\left[\Delta_{n,3}(t)\right],$$

where

$$\Delta_{n,1}(t) := \quad \mathbb{E}[e^{it(f_n(X)-f_n(Y))}] - e^{-\frac{t^2}{2}\mathbb{E}[(f_n(X)-f_n(Y))^2]},$$

$$\Delta_{n,2}(t) := \quad e^{-\frac{t^2}{2}\mathbb{E}[(f_n(X)-f_n(Y))^2]} - e^{-\frac{t^2}{2}(\sigma_n^2(X)+\sigma_n(Y)^2)},$$

$$\Delta_{n,3}(t) := \quad -\left(\mathbb{E}\left[e^{itf_n(X)}\right] - e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_n^2(X)}\right)e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_n^2(Y)} - \left(\mathbb{E}\left[e^{-itf_n(Y)}\right] - e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_n^2(Y)}\right)e^{-\frac{t^2}{2}\sigma_n^2(X)}.$$

Let us first consider the term $\Delta_{n,1}(t)$. On the one hand, if we denote by ϕ the characteristic function of a_1, we have by independence of the coefficients a_k that

$$\mathbb{E}[e^{it(f_n(X)-f_n(Y))}] = \prod_{k=1}^{n}\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}(f(kX)-f(kY))\right).$$

On the other hand, we have

$$\mathbb{E}[(f_n(X)-f_n(Y))^2] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(kX)-f(kY))^2.$$

Since a_1 has a finite third moment, the function $\log(\phi)$ is three-time differentiable in the neighborhood of zero. Using Taylor-Lagrange inequality and the fact that the a_k are centered with variance one, there exists constants $\eta > 0$ and $C > 0$ such that for

$$\left|\log\phi(u) + \frac{u^2}{2}\right| < C|u|^3, \quad \forall|u| \leq \eta.$$

By Sobolev embedding, if $f \in H^1$, it is continuous and hence bounded on $[0, 2\pi]$. Therefore, for all $t \in \mathbb{R}$ and for n large enough we have, uniformly in $1 \leq k \leq n$,

$$\left| \frac{t}{\sqrt{n}} (f(kX) - f(kY)) \right| \leq \eta$$

and thus uniformly in $1 \leq k \leq n$

$$\left| \log \left(\phi \left(\frac{t}{\sqrt{n}} (f(kX) - f(kY)) \right) \right) + \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} (f(kX) - f(kY))^2 \right| \leq \frac{8C||f||_\infty^3 |t|^3}{n\sqrt{n}}$$

Therefore, the exponential being Lipschitz, we get

$$\left| \prod_{k=1}^{n} \phi \left(\frac{t}{\sqrt{n}} (f(kX) - f(kY)) \right) - e^{-\frac{t^2}{2} \mathbb{E}[(f_n(X) - f_n(Y))^2]} \right| \leq \frac{8C||f||_\infty^3 |t|^3}{\sqrt{n}},$$

and taking the expectation with respect to $\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$, we deduce that

$$|\mathbb{E}_{X,Y} [\Delta_{n,1}(t)]| \leq \frac{8C||f||_\infty^3 |t|^3}{\sqrt{n}}.$$

Proceeding in the exact same way, we have

$$|\mathbb{E}_{X,Y} [\Delta_{n,3}(t)]| \leq \frac{2C||f||_\infty^3 |t|^3}{\sqrt{n}}.$$

We are thus left with the term $\Delta_{n,2}(t)$. Using again the fact that the exponential function is Lipschitz, we have

$$|\mathbb{E}_{X,Y} [\Delta_{n,2}(t)]| \leq t^2 \mathbb{E}_{X,Y} |\mathbb{E}[f_n(X) f_n(Y)]|.$$

The conclusion of Lemma 5.2.1 then follows from the following decorrelation estimate.

Lemma 5.4.1. *Suppose that $f \in H^1$, then there exists a constant $C = C(||f||_{H^1})$ such that*

$$\mathbb{E}_{X,Y} [|\mathbb{E}[f_n(X) f_n(Y)]|] \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Proof of Lemma 5.4.1. We have

$$\mathbb{E}[f_n(X) f_n(Y)] = \frac{1}{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} \mathbb{E}[a_k a_\ell] f(kX) f(\ell Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(kX) f(kY).$$

If $f \in H^1$, it is the limit of its Fourier sums $S_N f(x) := \sum_{|p| \leq N} \widehat{f}(p) e^{ipx}$ and for any N we can write

$$\mathbb{E}[f_n(X) f_n(Y)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(kX) - S_N f(kX)) f(kY)$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_N f(kX) (f(kY) - S_N f(kY)) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_N f(kX) S_N f(kY).$$

Now taking the absolute value and the expectation under $\mathbb{E}_{X,Y}$, we get

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[|\mathbb{E}[f_n(X)f_n(Y)]|\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[|f(kX)-S_Nf(kX)|\right]\mathbb{E}_Y\left[|f(kY)|\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[|S_Nf(kX)|\right]\mathbb{E}_Y\left[|f(kY)-S_Nf(kY)|\right]+\mathbb{E}_{X,Y}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_Nf(kX)S_Nf(kY)\right|\right].$$

Applying Cauchy–Schwarz inequality, we get for the first term on the right hand side

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[|f(kX)-S_Nf(kX)|\right]\mathbb{E}_Y\left[|f(kY)|\right] \leq ||f-S_Nf||_2 \times ||f||_2.$$

The second term can be treated similarly, namely

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_X\left[|S_Nf(kX)|\right]\mathbb{E}_Y\left[|f(kY)-S_Nf(kY)|\right] \leq \; ||f||_2 \times ||f-S_Nf||_2.$$

For the third term, observe that

$$S_Nf(kX)S_Nf(kY) = \sum_{1\leq|p|\leq N, 1\leq|q|\leq N}\widehat{f}(p)\widehat{f}(-q)e^{ik(pX-qY)}$$

and

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{ik(pX-qY)} = \exp\left(i\frac{n+1}{2}(pX-qY)\right)\frac{1}{n}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}(pX-qY)\right)}{\sin\left(\frac{pX-qY}{2}\right)}.$$

Therefore, applying once again Cauchy–Schwarz inequality (twice indeed), we deduce that if K_n denotes the standard Fejér such that $||K_n||_1 = 1$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_{X,Y}\left[|S_Nf(kX)S_Nf(kY)|\right] \leq \sum_{1\leq|p|\leq N, 1\leq|q|\leq N}|\widehat{f}(p)\widehat{f}(-q)|\mathbb{E}_{X,Y}\left[\frac{1}{n}K_n(pX-qY)\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{1\leq|p|\leq N}|\widehat{f}(p)|\right)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{1\leq|p|\leq N}|\widehat{f'}(p)|^2\right)\left(\sum_{1\leq|p|\leq N}\frac{1}{p^2}\right) \leq \frac{2||f'||_2^2}{\sqrt{n}}.$$

We thus get

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[|\mathbb{E}[f_n(X)f_n(Y)]|\right] \leq 2\,||f||_2\,||f-S_Nf||_2 + \frac{2||f'||_2^2}{\sqrt{n}}.$$

Now by Parseval identity, we have

$$||f-S_Nf||_2^2 = \sum_{|p|>N}|\widehat{f}(p)|^2 = \sum_{|p|>N}|\widehat{f'}(p)|^2 \times \frac{1}{p^2} \leq \frac{||f'||_2^2}{N^2}.$$

As a conclusion, choosing $N = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ we get indeed that there exists a constant $C = C(||f||_{H^1})$ such that

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[|\mathbb{E}[f_n(X)f_n(Y)]|\right] \le \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

$\square$

Proof of Lemma 5.2.2

We now give the detailed proof of Lemma 5.2.2. Recall that the goal is to establish that there exists a constant $C = C(\omega)$ such that $\mathbb{P}-$almost surely

$$\sup_{n\ge 1} \mathbb{E}_X[f_n(X)^2] \le C, \quad \sup_{\substack{n\ge 1,\\ M>n}} \mathbb{E}_X\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{M\le k\le M+n} a_k f_k(X)\right)^2\right] \le C.$$

We will give the proof of the first estimate as the proof of the second follows the exact same lines. Developing the square, we have

$$\mathbb{E}_X[f_n(X)^2] = \frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^n a_k a_\ell \mathbb{E}_X[f(kX)f(\ell X)].$$

As in the proof of Lemma 5.4.1, we can decompose

$$f(kX)f(\ell X) = \left(f(kX) - S_N f(kX)\right) f(\ell X) + S_N f(kX)\left(f(\ell X) - S_N f(\ell X)\right) + S_N f(kX) S_N f(\ell X),$$

so that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_X[f_n(X)^2] &= \frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^n a_k a_\ell \mathbb{E}_X\left[\left(f(kX) - S_N f(kX)\right) f(\ell X)\right] \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^n a_k a_\ell \mathbb{E}_X\left[S_N f(kX)\left(f(\ell X) - S_N f(\ell X)\right)\right] + \frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^n a_k a_\ell \mathbb{E}_X\left[S_N f(kX) S_N f(\ell X)\right].\end{aligned}$$

By Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^n a_k a_\ell \mathbb{E}_X\left[\left(f(kX) - S_N f(kX)\right) f(\ell X)\right]\right| \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^n |a_k a_\ell|\right) ||f - S_N f||_2 \times ||f||_2,$$

and similarly

$$\frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^n a_k a_\ell \mathbb{E}_X\left[S_N f(kX)\left(f(\ell X) - S_N f(\ell X)\right)\right] \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^n |a_k a_\ell|\right) ||f - S_N f||_2 \times ||f||_2.$$

For the last term, we use Minkowski inequality to deduce

$$\frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^{n} a_k a_\ell \mathbb{E}_X\left[S_N f(kX) S_N f(\ell X)\right] = \mathbb{E}_X\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k S_N f(kX)\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}_X\left[\left|\sum_{|p|\leq N}\widehat{f}(p)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikpX}\right)\right|^2\right] \leq \left[\sum_{|p|\leq N}|\widehat{f}(p)|\mathbb{E}_X\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikpX}\right|^2\right]^{1/2}\right]^2$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{|p|\leq N}|\widehat{f}(p)|\right)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\times 2||f'||_2^2.$$

Therefore, we have

$$\mathbb{E}_X[f_n(X)^2] \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k,\ell=1}^{n}|a_k a_\ell|\right)||f - S_N f||_2 \times ||f||_2 + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\times 2||f'||_2^2.$$

Choosing $N = n$, so that $||f - S_N f||_2 = O(1/n)$, by the law of large numbers, we conclude that there exists a constant $C = C(\omega)$ such that $\mathbb{P}-$almost surely

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}_X[f_n(X)^2] \leq C.$$

Proof of Lemma 5.2.3

This section is devoted to the proof of the continuity Lemma 5.2.3, namely our goal is to establish that $\mathbb{P}-$almost surely, there exists a constant $C = C(\omega)$ such that for any $0 < \alpha < 1/2$

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,s,\mu)}\right]\right| \leq C\left(||\lambda-\mu||_1 + ||\lambda||_1 \times ||t-s||_\infty^\alpha\right),$$

where we recall that

$$Z_n(X,t,\lambda) = \sum_{j=1}^{M}\lambda_j f_n\left(X + \frac{t_j}{n}\right), \quad Z_n(X,s,\mu) = \sum_{j=1}^{M}\mu_j f_n\left(X + \frac{s_j}{n}\right).$$

We have first, the exponential being Lipschitz and by the triangular inequality

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,s,\mu)}\right]\right| \leq \mathbb{E}_X\left[|Z_n(X,t,\lambda) - Z_n(X,s,\mu)|\right]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{M}|\lambda_j|\,\mathbb{E}_X\left[\left|f_n\left(X+\frac{t_j}{n}\right) - f_n\left(X+\frac{s_j}{n}\right)\right|\right] + \sum_{j=1}^{M}|\lambda_j-\mu_j|\,\mathbb{E}_X\left[\left|f_n\left(X+\frac{t_j}{n}\right)\right|\right].$$

On the one hand, by Cauchy–Schwarz inequality and Lemma 5.2.2, $\mathbb{P}-$almost surely, there exists a constant C such that

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_X \left[\left| f_n \left(X + \frac{t_j}{n} \right) \right| \right] \leq \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}_X \left[\left| f_n \left(X \right) \right|^2 \right]^{1/2} \leq C.$$

On the other hand, by Cauchy–Schwarz inequality again, we have for $1 \leq j \leq M$ such that $s_j \neq t_j$ (otherwise the bound is trivial)

$$\mathbb{E}_X \left[\left| f_n \left(X + \frac{t_j}{n} \right) - f_n \left(X + \frac{s_j}{n} \right) \right| \right]^2 \leq \mathbb{E}_X \left[\left| f_n \left(X + \frac{t_j}{n} \right) - f_n \left(X + \frac{s_j}{n} \right) \right|^2 \right]$$

$$= \mathbb{E}_X \left[\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \left(f \left(kX + \frac{kt_j}{n} \right) - f \left(kX + \frac{ks_j}{n} \right) \right) \right|^2 \right].$$

As in the proofs of Lemmas 5.2.1 and 5.2.2 above, we can then approximate f by its Fourier sum $S_N f$. Doing so, we obtain after applying Cauchy–Schwarz inequality again

$$\mathbb{E}_X \left[\left| f_n \left(X + \frac{t_j}{n} \right) - f_n \left(X + \frac{s_j}{n} \right) \right| \right]^2 \leq 4||f - S_N f||_2^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} |a_k a_\ell| \right)$$

$$+ 4||f - S_N f||_2 \left(\frac{1}{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} |a_k a_\ell| \, \mathbb{E}_X \left[\left| S_N f \left(kX + \frac{kt_j}{n} \right) - S_N f \left(kX + \frac{ks_j}{n} \right) \right|^2 \right]^{1/2} \right)$$

$$+ \mathbb{E}_X \left[\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \left(S_N f \left(kX + \frac{kt_j}{n} \right) - S_N f \left(kX + \frac{ks_j}{n} \right) \right) \right|^2 \right].$$

Using Parseval inequality, a direct computation gives uniformly in $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_X \left[\left| S_N f \left(kX + \frac{kt_j}{n} \right) - S_N f \left(kX + \frac{ks_j}{n} \right) \right|^2 \right] &= \sum_{|p|\leq N} |\widehat{f}(p)|^2 \left| e^{ip\frac{k}{n}t_j} - e^{ip\frac{k}{n}s_j} \right|^2 \\ &\leq ||f'||_2^2 \times |t_j - s_j|^2. \end{aligned}$$

Besides, by Minkowski inequality, we have

$$\begin{aligned}
A_n &:= \mathbb{E}_X\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\left(S_Nf\left(kX+\frac{kt_j}{n}\right)-S_Nf\left(kX+\frac{ks_j}{n}\right)\right)\right|^2\right]\\
&= \mathbb{E}_X\left[\left|\sum_{|p|\leq N}\widehat{f}(p)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k e^{ipkX}\left(e^{ip\frac{k}{n}t_j}-e^{ip\frac{k}{n}s_j}\right)\right|^2\right]\\
&\leq \left(\sum_{|p|\leq N}|\widehat{f}(p)|\,\mathbb{E}_X\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k e^{ipkX}\left(e^{ip\frac{k}{n}t_j}-e^{ip\frac{k}{n}s_j}\right)\right|^2\right]^{1/2}\right)^2\\
&= \left(\sum_{|p|\leq N}|\widehat{f}(p)|\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2\left|e^{ip\frac{k}{n}t_j}-e^{ip\frac{k}{n}s_j}\right|^2\right]^{1/2}\right)^2.
\end{aligned}$$

If we fix $0<\alpha<1/2$, we can upper bound

$$\left|e^{ip\frac{k}{n}t_j}-e^{ip\frac{k}{n}s_j}\right|^2 \leq 2^{2-2\alpha}|p|^{2\alpha}|t_j-s_j|^{2\alpha},$$

so that applying Cauchy–Schwarz inequality a last time

$$\begin{aligned}
A_n &\leq 4\left(\sum_{|p|\leq N}|\widehat{f}(p)|\,|p|^{\alpha}\right)^2 |t_j-s_j|^{2\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\\
&\leq 4||f'||_2^2\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{|p|^{2(1-\alpha)}}\right)|t_j-s_j|^{2\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2\right).
\end{aligned}$$

Gathering all the previous estimates and choosing N large enough such that

$$||f-S_Nf||_2 \leq \frac{1}{n}\min\{|t_j-s_j|,\, 1\leq j\leq M,\, |t_j-s_j|>0\} \leq \frac{1}{n}||t-s||_\infty,$$

we thus get

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)}\right]-\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,s,\mu)}\right]\right| \leq C||\lambda-\mu||_1\\
&+2||t-s||_\infty(1+1/n)\sqrt{\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k,\ell=1}^n |a_k a_\ell|}
\end{aligned}$$

indeed by the law of large numbers that there exists a constant $C=C(\omega)$ such that

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)}\right]-\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,s,\mu)}\right]\right| \leq C\left(||\lambda-\mu||_1+||\lambda||_1\times||t-s||_\infty^{\alpha}\right).$$

Proof of Lemma 5.2.4

We give now the proof of Lemma 5.2.4, which consists in showing that

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_X \left[e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_n(X,t,\lambda)^2]} \right] = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M} \lambda_i \lambda_j \, \rho(t_i - t_j) \right),$$

where we recall that

$$Z_n(X,t,\lambda) := \sum_{i=1}^{M} \lambda_i g_n(t_i) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f_n\left(X + \frac{t_i}{n}\right),$$

and

$$\rho(u) := \frac{1}{u}\int_0^u (f * \widetilde{f})(x)dx = \frac{1}{u}\int_0^u \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p)\widehat{f}(-p)e^{ipx} \right) dx = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p)\widehat{f}(-p) \times \int_0^1 e^{ipux}dx.$$

By independence of the coefficients (a_k) we have

$$\mathbb{E}[Z_n(X,t,\lambda)^2] = \sum_{i,j=1}^{M} \lambda_i \lambda_j \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(kX + \frac{kt_i}{n}\right) f\left(kX + \frac{kt_j}{n}\right).$$

Since the exponential is Lipschitz, in order to prove Lemma 5.2.4 it is sufficient to establish that, for each fixed $1 \le i, j \le M$, we have

$$R_n(i,j) := \mathbb{E}_X \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(kX + \frac{kt_i}{n}\right) f\left(kX + \frac{kt_j}{n}\right) - \rho(t_i - t_j) \right| \right] \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \quad (5.16)$$

As above, we now approximate f by its Fourier sum $S_N f$, so that by triangular inequality, we get

$$R_n(i,j) \le R_{n,1}(i,j) + R_{n,2}(i,j) + R_{n,3}(i,j)$$

with

$$R_{n,1}(i,j) = \mathbb{E}_X \left[\left| \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} S_N f\left(kX + \tfrac{kt_i}{n}\right) S_N f\left(kX + \tfrac{kt_j}{n}\right) - \rho(t_i - t_j) \right| \right],$$

$$R_{n,2}(i,j) = \mathbb{E}_X \left[\left| \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(f\left(kX + \tfrac{kt_i}{n}\right) - S_N f\left(kX + \tfrac{kt_i}{n}\right) \right) f\left(kX + \tfrac{kt_j}{n}\right) \right| \right],$$

$$R_{n,3}(i,j) = \mathbb{E}_X \left[\left| \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} S_N f\left(kX + \tfrac{kt_i}{n}\right) \left(f\left(kX + \tfrac{kt_j}{n}\right) - S_N f\left(kX + \tfrac{kt_j}{n}\right) \right) \right| \right].$$

On the one hand, using triangular and Cauchy–Schwarz inequalities, we get uniformly in n

$$R_{n,2}(p,q) \le ||f - S_N f||_2 ||f||_2, \quad R_{n,3}(p,q) \le ||f - S_N f||_2 ||S_N f||_2 \le ||f - S_N f||_2 ||f||_2.$$

On the other hand, expliciting $S_N f$ and ρ, by triangular inequality, we have

$$R_{n,1}(p,q) \leq \sum_{|p|\leq N} |\widehat{f}(p)|^2 \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{k}{n}p(t_i-t_j)} - \int_0^1 e^{ip(t_i-t_j)x}dx \right|$$

$$+\sum_{|p|>N} |\widehat{f}(p)|^2 \left| \int_0^1 e^{ip(t_i-t_j)x}dx \right| + \sum_{\substack{|p,q|\leq N\\ p\neq -q}} |\widehat{f}(p)\widehat{f}(q)| \mathbb{E}_X \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ik[(p+q)X+\frac{1}{n}(pt_i+qt_j)]} \right|$$

Using standard estimates for Riemann sums, we get

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{k}{n}p(t_i-t_j)} - \int_0^1 e^{ip(t_i-t_j)x}dx \right| \leq \frac{|p|}{n},$$

and by Cauchy–Schwarz inequality, if K_n denotes again the standard Fejér kernel such that $||K_n||_1 = 1$

$$\mathbb{E}_X \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ik[(p+q)X+\frac{1}{n}(pt_i+qt_j)]} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}_X \left[K_n\left((p+q)X + \frac{pt_i+qt_j}{n} \right) \right]^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

As a result, we get

$$\begin{aligned} R_{n,1}(p,q) &\leq \frac{1}{n} \times \sum_{|p|\leq N} |p|\, |\widehat{f}(p)|^2 + \sum_{|p|>N} |\widehat{f}(p)|^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(p)| \right)^2 \\ &\leq \frac{||f'||_2^2}{n} + ||f - S_N f||_2^2 + \frac{2||f'||_2^2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Letting both n and N go to infinity, we deduce that for all $1 \leq i,j \leq M$, the asymptotics (5.16) indeed holds, hence the result.

Proof of Lemma 5.2.5

Let us give the proof of Lemma 5.2.5 which asserts that there exists a constant C such that $\mathbb{P}-$almost surely

$$\widetilde{\Delta}_n := \mathbb{E}\left[\left| \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_n(X,t,\lambda)} \right] - \mathbb{E}_X\left[e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_n(X,t,\lambda)^2]} \right] \right|^2 \right] \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

where we recall that

$$Z_n(X,t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k\, \beta_{k,n}(X), \quad \text{with} \quad \beta_{k,n}(X) := \sum_{j=1}^{M} \lambda_j f\left(kX + \frac{kt_j}{n} \right).$$

The proof of similar to the one of Lemma 5.2.1. Namely developping the square under the expectation, if Y an independent copy of X, by inverting the sums, we obtain

$$\widetilde{\Delta}_n \;=\; \mathbb{E}_{X,Y}\left[\widetilde{\Delta}_{n,1}\right] + \mathbb{E}_{X,Y}\left[\widetilde{\Delta}_{n,2}\right] + \mathbb{E}_{X,Y}\left[\widetilde{\Delta}_{n,3}\right],$$

where, writing $Z_n(X) = Z_n(X, t, \lambda)$ to simplify the expressions, we have set

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_{n,1} &:= \mathbb{E}[e^{i(Z_n(X)-Z_n(Y))}] - e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[(Z_n(X)-Z_n(Y))^2]},\\
\widetilde{\Delta}_{n,2} &:= e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[(Z_n(X)-Z_n(Y))^2]} - e^{-\frac{1}{2}(\mathbb{E}[(Z_n(X)^2]+\mathbb{E}[(Z_n(X)^2])},\\
\widetilde{\Delta}_{n,3} &:= -\left(\mathbb{E}\left[e^{iZ_n(X)}\right] - e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[(Z_n(X)^2]}\right)e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[(Z_n(Y)^2]}\\
&\quad -\left(\mathbb{E}\left[e^{-iZ_n(Y)}\right] - e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[(Z_n(Y)^2]}\right)e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}[(Z_n(X)^2]}.
\end{aligned}$$

Proceeding exactly as the proof of Lemma 5.2.1 with a Taylor expansion at zero of the characteristic function ϕ of a_1, the terms $\widetilde{\Delta}_{n,1}(t)$ and $\widetilde{\Delta}_{n,3}(t)$ can be controlled as follows, for n large enough

$$|\widetilde{\Delta}_{n,1}| \leq \frac{8C||f|_\infty^3}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^M |\lambda_i|\right)^3, \qquad |\widetilde{\Delta}_{n,3}| \leq \frac{C||f|_\infty^3}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^M |\lambda_i|\right)^3.$$

Using the fact that the exponential is Lipschitz, we have otherwise

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[|\widetilde{\Delta}_{n,2}|\right] \leq \mathbb{E}_{X,Y}\left[|\mathbb{E}[Z_n(X)Z_n(Y)]|\right].$$

and the conclusion of Lemma 5.2.5 then follows from the next statement, which is multidimensional analogue of Lemma 5.4.1 above.

Lemma 5.4.2. *Suppose that $f \in H^1$, then there exists a constant $C = C(||f||_{H^1})$ such that*

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[|\mathbb{E}[Z_n(X)Z_n(Y)]|\right] \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Proof of Lemma 5.4.2. The proof follows readily the one of Lemma 5.4.1 detailed in Section 5.4 above. We have

$$\mathbb{E}[Z_n(X)Z_n(Y)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \beta_{k,n}(X)\beta_{k,n}(Y) = \sum_{1\leq i,j\leq M}\lambda_i\lambda_j\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(kX + \frac{kt_i}{n}\right)f\left(kY + \frac{kt_j}{n}\right)\right).$$

By the triangular inequality, it is thus sufficient to establish that, for any fixed $1 \leq i, j \leq M$, we have

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(kX + \frac{kt_i}{n}\right)f\left(kY + \frac{kt_j}{n}\right)\right|\right] \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

One then proceed exactly as in the proof of Lemma 5.4.1 by approximating f by its Fourier sum $S_N f$ to deduce that

$$\mathbb{E}_{X,Y}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(kX+\frac{kt_i}{n}\right) f\left(kY+\frac{kt_j}{n}\right)\right|\right] \leq 2\,||f||_2\,||f-S_N f||_2 + \frac{2||f'||_2^2}{\sqrt{n}}.$$

Choosing $N=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ then yields the result. $\square$

Proof of Lemma 5.2.6

This section is devoted to the proof of Lemma 5.2.6. Namely, writing again $Z_n(X) = Z_n(X,t,\lambda)$ to simplify the expressions, where we recall that

$$Z_n(X,t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\,\beta_{k,n}(X), \quad \text{with} \quad \beta_{k,n}(X) = \sum_{j=1}^{M}\lambda_j f\left(kX+\frac{kt_j}{n}\right),$$

our goal is to show that as m goes to infinity, if n is the unique integer such that $n^\gamma < m \leq (n+1)^\gamma$, then $\mathbb{P}-$almost surely, we have for all $0<\alpha<1/2$

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_{n^\gamma}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X)}\right]\right| = O\left(\left(1-\frac{n^\gamma}{m}\right)^\alpha\right).$$

Using again the fact that the exponential is Lipschitz, we have

$$\left|\mathbb{E}_X\left[e^{iZ_{n^\gamma}(X)}\right] - \mathbb{E}_X\left[e^{iZ_m(X)}\right]\right| \leq \mathbb{E}_X\left[|Z_{n^\gamma}(X)-Z_m(X)|\right].$$

Expliciting the absolute value, we get by the triangular inequality

$$\mathbb{E}_X\left[|Z_{n^\gamma}(X)-Z_m(X)|\right] \leq \mathbb{E}_X\left[|U|+|V|+|W|\right],$$

where

$$U := \left(1-\sqrt{\frac{n^\gamma}{m}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n^\gamma}}\sum_{k=1}^{n^\gamma} a_k\beta_{k,n^\gamma}(X)\right)\ , \ V := \sqrt{1-\frac{n^\gamma}{m}}\left(\frac{1}{\sqrt{m-n^\gamma}}\sum_{k=n^\gamma+1}^{m} a_k\beta_{k,m}(X)\right),$$

$$\text{and } \ W := \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{k=1}^{n^\gamma} a_k\left(\beta_{k,n^\gamma}(X)-\beta_{k,m}(X)\right)\right).$$

Applying Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\mathbb{E}_X[|U|]^2 \leq \left(1-\sqrt{\frac{n^\gamma}{m}}\right)^2\left(\frac{1}{n^\gamma}\sum_{k,\ell=1}^{n^\gamma} a_k a_\ell\,\mathbb{E}_X[\beta_{k,n^\gamma}(X)\beta_{\ell,n^\gamma}(X)]\right)$$

with

$$\mathbb{E}_X[\beta_{k,n^\gamma}(X)\beta_{\ell,n^\gamma}(X)] = \sum_{i,j=1}^{M}\lambda_i\lambda_j\mathbb{E}_X\left[f\left(kX+\frac{kt_i}{n^\gamma}\right)f\left(\ell X+\frac{\ell t_j}{n^\gamma}\right)\right].$$

Proceeding as in the proof of Lemma 5.2.2, i.e. approximating f by its Fourier sum $S_N f$, one then gets, uniformly in k, ℓ and i, j

$$\left|\mathbb{E}_X\left[f\left(kX+\frac{kt_i}{n^\gamma}\right)f\left(\ell X+\frac{\ell t_j}{n^\gamma}\right)\right]\right| \le \left|\mathbb{E}_X\left[S_N f\left(kX+\frac{kt_i}{n^\gamma}\right)S_N f\left(\ell X+\frac{\ell t_j}{n^\gamma}\right)\right]\right| \\ +2||f-S_N f||_2 \times ||f||_2.$$

Besides, by Minkowski inequality, we have

$$\begin{aligned} S := & \sum_{i,j=1}^{M}\lambda_i\lambda_j\frac{1}{n^\gamma}\sum_{k,l=1}^{n^\gamma}a_k a_\ell\,\mathbb{E}_X\left[S_N f\left(kX+\frac{kt_i}{n^\gamma}\right)S_N f\left(\ell X+\frac{\ell t_j}{n^\gamma}\right)\right] \\ = & \ \mathbb{E}_X\left[\left|\sum_{|p|\le N}\widehat{f}(p)\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\frac{1}{\sqrt{n^\gamma}}\sum_{k=1}^{n^\gamma}a_k e^{ip\left(kX+\frac{kpt_j}{n^\gamma}\right)}\right|^2\right] \\ \le & \left[\sum_{|p|\le N}|\widehat{f}(p)|\sum_{j=1}^{M}|\lambda_j|\mathbb{E}_X\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n^\gamma}}\sum_{k=1}^{n^\gamma}a_k e^{ip\left(kX+\frac{kpt_j}{n^\gamma}\right)}\right|^2\right]^{1/2}\right]^2 \\ = & \left[\sum_{|p|\le N}|\widehat{f}(p)|\sum_{j=1}^{M}|\lambda_j|\left(\frac{1}{n^\gamma}\sum_{k=1}^{n^\gamma}a_k^2\right)^{1/2}\right]^2 \le 2\left(\frac{1}{n^\gamma}\sum_{k=1}^{n^\gamma}a_k^2\right)||f'||_2^2||\lambda||_1^2. \end{aligned}$$

As a result, we get

$$\mathbb{E}_X[|U|]^2 \le 2\left(1-\sqrt{\frac{n^\gamma}{m}}\right)^2||\lambda||_1^2\left[\left(\frac{1}{n^\gamma}\sum_{k,l=1}^{n^\gamma}|a_k a_\ell|\right)||f-S_N f||_2\times||f||_2+||f'||_2^2\left(\frac{1}{n^\gamma}\sum_{k=1}^{n^\gamma}a_k^2\right)\right].$$

Choosing $N = n^\gamma$, so that $||f - S_N f||_2 = O(1/n^\gamma)$, by the law of large numbers, we conclude that there exists a constant $C = C(\omega)$ such that $\mathbb{P}-$almost surely

$$\mathbb{E}_X[|U|]^2 \le C\left(1-\sqrt{\frac{n^\gamma}{m}}\right)^2.$$

By the exact same arguments, there exists a constant $C = C(\omega)$ such that $\mathbb{P}-$almost surely

$$\mathbb{E}_X[|V|]^2 \le C\left(1-\frac{n^\gamma}{m}\right).$$

For the last term, using again Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\mathbb{E}_X[|W|]^2 \le \frac{1}{m}\sum_{k,\ell=1}^{n^\gamma}a_k a_\ell\,\mathbb{E}_X[(\beta_{k,n^\gamma}(X)-\beta_{k,m}(X))(\beta_{\ell,n^\gamma}(X)-\beta_{\ell,m}(X))].$$

Moreover, a direct computation yields, uniformly in $1 \le j \le M$ and $1 \le k \le n^\gamma$

$$\mathbb{E}_X \left[\left| S_N f\left(kX + \frac{kt_j}{n^\gamma}\right) - S_N f\left(kX + \frac{kt_j}{m}\right) \right| \right] \le \left(\sum_{|p|\le N} |\widehat{f}(p)|^2 \left| e^{ip\frac{k}{n^\gamma}t_j} - e^{ip\frac{k}{m}t_j} \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\le \left(\sum_{|p|\le N} |p\widehat{f}(p)|^2 \left| \frac{k}{n^\gamma}\left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right) \right|^2 \right)^{1/2} \le ||f'||_2 \left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right).$$

As a result, approximating f by its Fourier sum $S_N f$, we get this time

$$\mathbb{E}_X[|W|]^2 \le 4||\lambda||_1^2 \left(||f - S_N f||_2^2 + ||f - S_N f||_2 ||f'||_2 \left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right) \right) \left(\frac{1}{m} \sum_{k,l=1}^{n^\gamma} |a_k a_\ell| \right) + T$$

where

$$T := \mathbb{E}_X \left[\left| \sum_{|p|\le N} \widehat{f}(p) \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} a_k e^{ipkX} \left(e^{ip\frac{k}{n^\gamma}t_j} - e^{ip\frac{k}{m}t_j} \right) \right|^2 \right]$$

$$\le \left[\sum_{|p|\le N} |\widehat{f}(p)| \sum_{i=1}^M |\lambda_i| \mathbb{E}_X \left[\left| \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{n^\gamma} a_k e^{ipkX} \left(e^{ipt_j\frac{k}{n^\gamma}} - e^{ipt_j\frac{k}{m}} \right) \right|^2 \right]^{1/2} \right]^2$$

$$= \left[\sum_{|p|\le N} |\widehat{f}(p)| \sum_{i=1}^M |\lambda_i| \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n^\gamma} a_k^2 \left| e^{ip\frac{k}{n^\gamma}t_j} - e^{ip\frac{k}{m}t_j} \right|^2 \right)^{1/2} \right]^2.$$

Proceeding as in the end of the proof of Lemma 5.2.3, if we fix $0 < \alpha < 1/2$, we can upper bound

$$\left| e^{ip\frac{k}{n^\gamma}t_j} - e^{ip\frac{k}{m}t_j} \right|^2 \le 2^{2-2\alpha} |p|^{2\alpha} ||t||_\infty^{2\alpha} \left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right)^{2\alpha},$$

so that

$$T \le \left(\sum_{|p|\le N} |\widehat{f}(p)| \times |p|^\alpha \right)^2 ||\lambda||_1^2 \times ||t||_\infty^{2\alpha} \left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right)^{2\alpha} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n^\gamma} a_k^2 \right),$$

and last, using Cauchy–Schwarz inequality

$$T \le ||f'||_2^2 \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|p|^{2(1-\alpha)}} \right) ||\lambda||_1^2 \times ||t||_\infty^{2\alpha} \left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right)^{2\alpha} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n^\gamma} a_k^2 \right).$$

Choosing $N = n^\gamma$, so that $||f - S_N f||_2 = O(1/n^\gamma)$, by the law of large numbers, we conclude as above that there exists a constant $C = C(\omega)$ such that $\mathbb{P}-$almost surely

$$\mathbb{E}_X[|W|]^2 \leq C\left(1 - \frac{n^\gamma}{m}\right)^{2\alpha},$$

hence the result.

Proof of Lemma 5.3.6

In this proof, the remainders "$O(\cdot)$" are uniform.
Under our regularity assumption **(H')**, for $\ell \in \{q, q+1\}$ with $q_0 - q > 2$, $f^{(\ell)} \in \mathcal{C}^{q_0-\ell}$. Using the fact that $\widehat{f^{(\ell)}}(p) = p^\ell \widehat{f}(p)$, the Fourier series $\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} p^\ell \widehat{f}(p)$ is convergent for $\ell \in \{q, q+1\}$ and we can write $f^{(\ell)}$ as the N-truncated Fourier series

$$f^{(\ell)}(x) = \sum_{1\leq|p|\leq N} \widehat{f^{(\ell)}}(p)e^{ipx} + O\left(\frac{\ln(N)}{N^{q_0-\ell}}\right).$$

For all $t \in [0, 2\pi]$, we have

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{k}{n}\right)^\ell f^{(\ell)}(k(X+t/n))\right|^2 \\
= & \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leq|p|\leq N}\widehat{f^{(\ell)}}(p)\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{k}{n}\right)^\ell e^{ipk(X+t/n)} + O\left(\frac{\ln(N)}{N^{q_0-\ell}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{k}{n}\right)^\ell\right|^2 \\
\leq & 2\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\sum_{1\leq|p|\leq N} p^\ell\widehat{f}(p)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{k}{n}\right)^\ell e^{ipk(X+t/n)}\right|^2\right. \\
& \left. + O\left(\frac{\ln^2(N)}{N^{2(q_0-\ell)}}\right)\mathbb{E}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{k}{n}\right)^\ell\right|^2\right)
\end{aligned}$$

For the left-hand term, Minkoswki inequality gives

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left[\left(\sum_{1\leq|p|\leq N} p^\ell\widehat{f}(p)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{k}{n}\right)^\ell e^{ipk(X+t/n)}\right)^2\right]} \\
\leq & \sum_{1\leq|p|\leq N} p^\ell|\widehat{f}(p)|\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{k}{n}\right)^\ell e^{ipk(X+t/n)}\right|^2}.
\end{aligned}$$

By orthogonality of the complex exponential family,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{k}{n}\right)^{\ell} e^{ipk\left(X+\frac{t}{n}\right)}\right|^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k,r=1}^{n}\mathbb{E}[a_k a_r]\left(\frac{k}{n}\right)^{\ell}\left(\frac{r}{n}\right)^{\ell}\underbrace{\mathbb{E}_X\left[e^{ip(k-r)(X+t/n)}\right]}_{=\delta_{k,r}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\ell}.
\end{aligned}$$

Hence,

$$\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}_X}\left|\sum_{1\le|p|\le N} p^{\ell}\widehat{f}(p)\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\frac{k}{n}\right)^{\ell} e^{ipk(X+t/n)}\right|^2} \le \sum_{1\le|p|\le N} p^{\ell}|\widehat{f}(p)|\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\ell}}.$$

For the right-hand term, Cauchy-Schwarz inequality gives

$$O\left(\frac{\ln^2(N)}{N^{2(q_0-\ell)}}\right)\mathbb{E}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\frac{k}{n}\right)^{\ell}\right|^2 \le n\times O\left(\frac{\ln^2(N)}{N^{2(q_0-\ell)}}\right)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\ell}.$$

We choose $N=n$ so that the previous term tends to zero as n goes to infinity by the choice of ℓ. The convergence of the series $\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} p^{\ell}|\widehat{f}(p)|$ and $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\ell}$ gives the wanted result.

Bibliography

[ADL16] Jean-Marc Azaïs, Federico Dalmao, and José R. León. CLT for the zeros of classical random trigonometric polynomials. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.*, 52(2):804–820, 2016.

[ADP19] Jürgen Angst, Federico Dalmao, and Guillaume Poly. On the real zeros of random trigonometric polynomials with dependent coefficients. *Proc. Am. Math. Soc.*, 147(1):205–214, 2019.

[AF03] Robert A Adams and John JF Fournier. *Sobolev Spaces (Pure and applied mathematics; v. 140).* Elsevier, 2003.

[AL21] Michele Ancona and Thomas Letendre. Roots of kostlan polynomials: moments, strong law of large numbers and central limit theorem. arXiv:1911.12182, to appear at Ann. Henri Lebesgue, 2021.

[AP15] Jürgen Angst and Guillaume Poly. Universality of the mean number of real zeros of random trigonometric polynomials under a weak Cramér condition. arXiv:1511.08750, 2015.

[AP19] Jürgen Angst and Guillaume Poly. Variations on Salem–Zygmund results for random trigonometric polynomials. Application to almost sure nodal asymptotics. arXiv:1912.09928, 2019.

[AP20a] Jürgen Angst and Guillaume Poly. On the absolute continuity of random nodal volumes. *Annals of Probability*, 48(5):2145–2175, 2020.

[AP20b] Jürgen Angst and Guillaume Poly. On the Zeros of Non-Analytic Random Periodic Signals. *International Mathematics Research Notices*, 08 2020. rnaa201.

[APP18] Jürgen Angst, Viet-Hung Pham, and Guillaume Poly. Universality of the nodal length of bivariate random trigonometric polynomials. *Trans. Am. Math. Soc.*, 370(12):8331–8357, 2018.

[APP21a] Jürgen Angst, Thibault Pautrel, and Guillaume Poly. Real zeros of random trigonometric polynomials with dependent coefficients. *arXiv preprint arXiv:2102.09653*, 2021.

[APP21b] Jürgen Angst, Thibault Pautrel, and Guillaume Poly. Universality of the number of zeros of random non-analytic signals. *preprint*, 2021.

[AW09] Jean-Marc Azaïs and Mario Wschebor. *Level sets and extrema of random processes and fields.* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.

[BCP19] Vlad Bally, Lucia Caramellino, and Guillaume Poly. Non universality for the variance of the number of real roots of random trigonometric polynomials. *Probab. Theory Relat. Fields*, 174(3-4):887–927, 2019.

[BN71] Paul L. Butzer and R. J. Nessel. *Fourier analysis and approximation. Vol. 1: One-dimensional theory*, volume 40. Birkhäuser Verlag, Basel, 1971.

[BNR20] Jacques Benatar, Alon Nishry, and Brad Rodgers. Moments of polynomials with random multiplicative coefficients. arXiv:2012.15507, 2020.

[CCK17] Victor Chernozhukov, Denis Chetverikov, and Kengo Kato. Central limit theorems and bootstrap in high dimensions. *Annals of Probability*, 45(4):2309–2352, 2017.

[CFS82] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Ya. G. Sinai. *Ergodic theory. Transl. from the Russian by A. B. Sossinskii*, volume 245. Springer, Berlin, 1982.

[Dal15] Federico Dalmao. CLT for the zeros of Kostlan Shub Smale random polynomials. *arXiv preprint arXiv:1504.05355*, 2015.

[DNN20] Yen Do, Hoi H. Nguyen, and Oanh Nguyen. Random trigonometric polynomials: universality and non-universality of the variance for the number of real roots, 2020.

[DNV18] Yen Do, Oanh Nguyen, and Van Vu. Roots of random polynomials with coefficients of polynomial growth. *Ann. Probab.*, 46(5):2407–2494, 2018.

[Dun66] J. E. A. Dunnage. The number of real zeros of a random trigonometric polynomial. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 16:53–84, 1966.

[DV20] Yen Do and Van Vu. Central limit theorems for the real zeros of Weyl polynomials. *American Journal of Mathematics*, 142(5):1327–1369, 2020.

[EK95] Alan Edelman and Eric Kostlan. How many zeros of a random polynomial are real? *Bulletin of the American Mathematical Society*, 32(1):1–37, 1995.

[Far86] Kambiz Farahmand. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *the Annals of Probability*, 14(2):702–709, 1986.

[FL12] K Farahmand and Tao Li. Real zeros of three different cases of polynomials with random coefficients. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 1875–1892, 2012.

[Fla17] Hendrik Flasche. Expected number of real roots of random trigonometric polynomials. *Stochastic Processes Appl.*, 127(12):3928–3942, 2017.

[GW11] Andrew Granville and Igor Wigman. The distribution of the zeros of random trigonometric polynomials. *American journal of mathematics*, 133(2):295–357, 2011.

[HNTX15] Yaozhong Hu, David Nualart, Samy Tindel, and Fangjun Xu. Density convergence in the Breuer-Major theorem for Gaussian stationary sequences. *Bernoulli*, 21(4):2336–2350, 2015.

[Iha00] Shunsuke Ihara. Large deviation theorems for Gaussian processes and their applications in information theory. *Acta Appl. Math.*, 63(1-3):165–174, 2000.

[IKM16] Alexander Iksanov, Zakhar Kabluchko, and Alexander Marynych. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials. *Electron. J. Probab.*, 21:19, 2016. Id/No 63.

[IM71] I. A. Ibragimov and N. B. Maslova. On the expected number of real zeros of random polynomials. I: Coefficients with zero means. *Theory Probab. Appl.*, 16:228–248, 1971.

[IZ13] Ildar Ibragimov and Dmitry Zaporozhets. On distribution of zeros of random polynomials in complex plane. In *Prokhorov and contemporary probability theory*, pages 303–323. Springer, 2013.

[Kac43] Mark Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(4):314–320, 1943.

[Kos93] Eric Kostlan. On the distribution of roots of random polynomials. In *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*, pages 419–431. Springer, 1993.

[Mas74] Nina B Maslova. On the variance of the number of real roots of random polynomials. *Theory of Probability & Its Applications*, 19(1):35–52, 1974.

[Mat12] Jeffrey Matayoshi. The real zeros of a random algebraic polynomial with dependent coefficients. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 1015–1034, 2012.

[Muk19] Safari Mukeru. Average number of real zeros of random algebraic polynomials defined by the increments of fractional brownian motion. *Journal of Theoretical Probability*, 32(3):1502–1524, 2019.

[NNV16] Hoi Nguyen, Oanh Nguyen, and Van Vu. On the number of real roots of random polynomials. *Communications in Contemporary Mathematics*, 18(04):1550052, 2016.

[NV18] Oanh Nguyen and Van Vu. Roots of random functions: A general condition for local universality. arXiv:1711.03615, 2018.

[Pau20] Thibault Pautrel. New asymptotics for the mean number of zeros of random trigonometric polynomials with strongly dependent Gaussian coefficients. *Electron. Commun. Probab.*, 25:13, 2020. Id/No 36.

[Pir20] Ali Pirhadi. Real zeros of random trigonometric polynomials with pairwise equal blocks of coefficients. *Rocky Mt. J. Math.*, 50(4):1451–1471, 2020.

[Pir21] Ali Pirhadi. Real zeros of random cosine polynomials with palindromic blocks of coefficients. *Analysis Mathematica*, 47(1):175–210, 2021.

[Pri18] Igor E Pritsker. Zero distribution of random polynomials. *Journal d'Analyse Mathématique*, 134(2):719–745, 2018.

[PS14] Igor Pritsker and Alan Sola. Expected discrepancy for zeros of random algebraic polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142(12):4251–4263, 2014.

[PY15] Igor E. Pritsker and Aaron M. Yeager. Zeros of polynomials with random coefficients. *J. Approx. Theory*, 189:88–100, 2015.

[Qua70] Clifford Qualls. On the number of zeros of a stationary gaussian random trigonometric polynomial. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2):216–220, 1970.

[RS84] N. Renganathan and M. Sambandham. On the average number of real zeros of a random trigonometric polynomial with dependent coefficients. II. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 15:951–956, 1984.

[RS01] Alexander Rusakov and Oleg Seleznjev. On weak convergence of functionals on smooth random functions. *Mathematical Communications*, 6(2):123–134, 2001.

[Sam78] M. Sambandham. On the number of real zeros of a random trigonometric polynomial. *Trans. Am. Math. Soc.*, 238:57–70, 1978.

[SZ54] R. Salem and Antoni Zygmund. Some properties of trigonometric series whose terms have random signs. *Acta Math.*, 91:245–301, 1954.

[TV15] Terence Tao and Van Vu. Local universality of zeroes of random polynomials. *International Mathematics Research Notices*, 2015(13):5053–5139, 2015.

[Wil07] Palma Wilfredo. *Long-memory time series. Theory and methods.* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.

[Zyg02] A. Zygmund. *Trigonometric series. Volumes I and II combined. With a foreword by Robert Fefferman. 3rd ed.* Cambridge: Cambridge University Press, 3rd ed. edition, 2002.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Titre : Quelques contributions à l'étude de l'universalité des zéros de fonctions trigonométriques. aléatoires

Mots clés : Analyse stochastique, processus gaussiens, formule de Kac-Rice, ensemble nodal, universalité globale

Résumé : On s'intéresse dans cette thèse au comportement asymptotique (presque-sûr, en loi, en moyenne) de la variable aléatoire comptant le nombre de zéros de fonctions trigonométriques sur un intervalle donné. On examine en outre si l'on a un phénomène d'universalité, c'est-à-dire si ce nombre dépend ou non de la loi des coefficients, de leur corrélation, ou encore des fonctions de base. Pour cela, on se place dans le cadre de coefficients gaussiens stationnaires dépendants, pour lesquels la dépendance s'exprime à travers la mesure spectrale. On montre alors que la nature de cette dernière influe grandement sur le comportement asymptotique du nombre de zéros et peut même, sous certaines hypothèses, aboutir tant à des résultats d'universalité qu'à des phénomènes non-universels. A l'aide d'outils d'analyse stochastique tels que la formule de Kac-Rice ou encore l'extension des techniques employées par Salem et Zygmund dans les années 1950, on exhibe des asymptotiques universelles globales en moyenne et presque-sûres.

Title : Some contributions to the universality of zeros of random trigonometric functions.

Keywords : Stochastic analysis, Gaussian processes, Kac-Rice formula, nodal set, global universality

Abstract : We study in this thesis the asymptotic behavior (almost-sure, in distribution, on average) of the random variable counting the number of zeros of random trigonometric functions on a given interval. We specifically investigate the universality phenomenon, i.e. examine if this behavior does or does not depend on the law of the random coefficents, their correlation or the influence of the basis functions. In order to achieve this, we work under the framework of dependent stationary Gaussian processes, for which the dependency can be translated in terms of spectral measure. We show that the nature of this latter has a great influence on the asymptotic behavior for the number of zeros and can even - under specific assumptions - lead to universal results as well as non-universal ones. Using tools from stochastic analysis such that Kac-Rice formula or extending some techniques drawn from Salem and Zygmund's work in the 1950s, we exhibit global universal asymptotics, on average and almost-sure.